

भूमिका

करणानुयोगका एक महत्त्वपूर्ण ग्रन्थ तिलोयपण्णत्ती जीवराज ग्रन्थमालासे दो भागोंमें (१९४३, १९५१) प्रकाशित हुआ था। सम्पादकों और अनुवादकने ग्रंथके गणित भागको सम्हालनेका अपनी शक्तिभर प्रयास किया था। किन्तु उन्हें इस विषयमें अपनी सीमाका भान था। अतएव उसके गणित भागका समुचित रीतिसे किसी गणितके अधिकारी विद्वान् द्वारा अध्ययन करानेकी सम्पादकोंको इच्छा हुई। सौभाग्यसे उन्हें ऐसी योग्यता गणितके नवयुवक प्रोफेसर श्री. लक्ष्मीचन्द्र जैन, एम्. एस्सी. में दिखाई दी। उन्हें इस विषयमें स्वयं भी रुचि उत्पन्न हुई। अतः उन्होंने उक्त तिलोयपण्णत्तीके गणित भागका अध्ययन कर मुद्रित १०४ पृष्ठोंका यह लेख लिखा है जो जंबूद्वीपपण्णत्तीकी प्रस्तावनामें प्रकाशित है। जैन ग्रंथोंमें प्रयुक्त विशेष संकेतों व चित्रों सहित गणितकी नाना प्रक्रियाओंके अतिरिक्त उन्होंने जो यूनानी, चीनी आदि लेखोंके साथ इनकी तुलना की है (देखिये गणित लेख पृ. १०, १३ आदि) वह बड़ी महत्त्वपूर्ण है। वर्तमानमें यह कह सकना तो कठिन है कि इस ज्ञानका प्राचीन कालमें क्या कोई आदान प्रदान हुआ था, और कौनने किसे कितना दिया व कितना लिया था। किन्तु यह विषय आगे अनुसन्धान करने योग्य है। इस दिशामें प्रोफेसर लक्ष्मीचन्द्रजी प्रयत्नशील भी हैं।

शोलापुर

५-१-५८

सम्पादक,

ही. ला. जैन

आ. ने. उपाध्ये

— प्रकाशक —

गुलाबचंद हिराचंद दोशी

अध्यक्ष,

जैन संस्कृति संरक्षक संघ, शोलापुर

— मुद्रक —

ज्योतिषप्रकाश प्रेस

विश्वेश्वर गंज, वाराणसी

तिलोय-पण्णत्तिका गणित

परम्परा के आधार पर त्रिकालवर्ती विद्व-रचना का सार रूप से परिचय कराने वाला यह (तिलोय पण्णत्ति नामक) ग्रंथ मुख्यतः गणित ग्रंथ नहीं है। सूत्रबद्ध प्ररूपणा में केवल फलों का वर्णन तथा कहीं कहीं उपयोग में लाये गये सूत्रों का वर्णन रहता है। इस ग्रंथ में कहीं कहीं गणित की शलक होने से, गगना की शैली का कुछ वर्णन सम्भव हो सका है। ऐतिहासिक दृष्टि से, यह ग्रंथ महत्वपूर्ण प्रतीत होता है। अन्य समकालीन व्यपदा कुछ पूर्वोत्तर ग्रंथों की तुलना में, इस ग्रंथ में कुछ ऐसे प्रकरण तथा निरूपण दिये गये हैं जिनके आधार पर तिलोय-पण्णत्ति का रचना से शताब्दियों पूर्व प्रचलित ज्ञान के विषय में आभास मिल जाता है। सबसे महत्वपूर्ण वस्तु असंख्यात विषयक संख्याओं की प्रतीकों के आधार पर प्ररूपणा है। इन प्रतीकों के आधार पर भाषा विज्ञान श्वात्नी उनके उपयोग में लाये जाने वाले काल को निश्चित कर सकता है। यतिवृषभ के द्वारा कश् इसकी रचना हुई, यह बात इतनी महत्वपूर्ण नहीं है, जितना कि इन क्रियात्मक प्रतीकों के उपयोग का रचना काल। दूसरी महत्वपूर्ण वस्तु, विविध वेद्यासन आदि आकार के सांद्रों का घनफल, छेदविधि निरूपण तथा वृत्त सम्बन्धी माप हैं। ज्यामिति के क्षेत्र में भारतवर्ष बहुत पीछे रहा है। परन्तु इन ज्यामिति विधियों के आधार पर मिश्र, बेबीलोन, यूनान, चीन, आदि देशों की रेखागणित से सह सम्बन्ध नहीं तो तुलनात्मक अध्ययन हो सकता है। इसके पश्चात् संख्या प्ररूपणा, श्रेणि-प्ररूपणा और अत्यवहृत तथा व्योतिप सम्बन्धी सिद्धान्तों का मात्र प्रतिपादन गणितज्ञ के लिये कितने रोचक होने, यह निम्न लिखित विवेचन से स्पष्ट हो जावेगा।

संख्या सिद्धान्त

आधुनिक गणितज्ञ के लिये संख्या शब्द की स्पष्ट परिभाषा की आवश्यकता नहीं रहती। तिम पर भी, व्यापक रूप से सर्व प्रकारकी संख्याओं, वास्तविक और काल्पनिक, परिमेय और अपरिमेय, पूर्णांक और भिन्न आदि का निरूपण करने के लिये यह कहा जा सकता है कि संख्या केवल नमान राशियों (ढेरों) की राशि है, और कुछ नहीं। गणित के इतिहास से प्रतीत होता है कि सबसे पहिले महावीराचार्य ने काल्पनिक संख्याओं को पहिचान कर उनको उपयोग में न लाने का कथन किया था। तथापि, जैसे ३ आदमी का अर्थ आदमी की आधी लँचाई लेकर उसका उपयोग किया जा सकता है, उसी प्रकार काल्पनिक संख्याओं का आधुनिक-युगीन विभिन्न विद्वानों में विस्तृत और महत्वपूर्ण उपयोग हो चुका है। पायथेगोरियन युग में भी अनन्त के विषय में वार्तायें चल पड़ी थीं, परन्तु जीनो के तर्कों ने बाद के गणितज्ञों को उस ओर आगे जाने में भय उत्पन्न कर दिया था। जब गेलिलियो के पश्चात् उन्नीसवीं सदी में जार्ज कैटर ने अनन्त विषयक गणित की संरचना प्रारम्भ की, उस समय गणितज्ञों ने कहा था^१ कि यह विषय १०० वर्ष अति पूर्व लाया गया है। किन्तु भारतवर्ष में यह विषय ईसा से कुछ शताब्दियों पूर्व प्रतिपादित हो चुका था। पुण्डित और भूतबलि के ग्रंथ पटुल्लङ्गागम तथा उनके पश्चात् के प्रायः सभी ग्रंथों में असंख्यात और अनन्त शब्द विलकुल साधारण शैली में उपयोग में लाये जाते हैं, मानों ये हमसे अपरिचित ही नहीं हैं। तिलोय-पण्णत्ति में, असंख्यात और अनन्त के वास्तविक दर्शन को क्रमशः अवधिज्ञान तथा केवलज्ञानी का विषय बनाया है। वीरसेन ने अनन्त संश उस राशि को दी है, जो व्यय क हात रहने पर भी अनन्त काल में समाप्त न हो। संख्यात अथवा असंख्यात प्रमाण राशि, अनन्त

में से व्यय कर दी जाने पर भी, अनन्त का प्रमाण अनन्त रहता है, अथवा उसकी अनन्त संज्ञा नष्ट न हो सकती है। यद्यपि संख्या के २१ भेदों का उल्लेख तथा उन्हें उत्पन्न करने का पूर्ण विवरण तिलोच-पण्णि में है, तथापि उन भेदों का वास्तविक अर्थ समझना बांछनीय है। संख्यात से उत्कृष्ट संख्यात की प्राप्ति होने पर, केवल १ जोड़ने पर जघन्य परीत असंख्यात प्राप्त हो जावे, पर उस संख्या में यह असंख्यात संज्ञा उपचार रूप में दी गई है। वास्तविक असंख्यात वहाँ से प्रारम्भ होता है, जहाँ उत्कृष्ट असंख्यात की प्राप्ति के लिये, वास्तविक असंख्यात संज्ञाधारी धर्म द्रव्यादि राशियों को क्रमबद्ध गणना से प्राप्त संख्यात में जोड़ा जाता है। इसी प्रकार, उत्कृष्ट असंख्यात-असंख्यात में १ जोड़ने पर जघन्य परीत अनन्त की जो उत्पत्ति है वह अनन्त संज्ञा की धारी इसलिये है कि वह संख्या अब अवधिज्ञानी का विषय नहीं रही। इसलिये औपचारिक रूप से अनन्त शब्द द्वारा बोधित है, वास्तविक अनन्त नहीं है। अनन्त की प्राप्ति के लिये इस संख्या से क्रमबद्ध गणना के पश्चात् जो असंख्यात से ऊपर प्रमाण राशि उत्पन्न होती है, उसमें उपधारित (Postulated) अनन्त राशियों अब मिलाई जाती हैं तभी वह वास्तविक अनन्त संज्ञा की अधिकारिणी होती है। इनके आधार पर द्रव्य, क्षेत्र और काल के आधार पर कहे गये प्रमाण तथा उनका अल्पबहुत्व (Calculus of relations) मौलिक है, मनोरंजक भी है। यहाँ अल्पबहुत्व (Comparability) के सम्बन्ध में एक महत्वपूर्ण तथ्य संक्षेप में बतलाना आवश्यक है। वह यह कि किसी अनन्त से अपेक्षाकृत बड़ा अनन्त भी होता है। उदाहरणतः यह बात मन में साधारणतः नहीं बैठती है कि क्या अनन्त काल के एक एक करके बीतनेवाले समयों में संसारी जीव राशि कभी समाप्त नहीं होती। इस सत्य का दर्शन करने के लिये और समाधान के लिये हम पाठकों को केंटर द्वारा प्रस्तुत दशमलव तथा एक एक संवाद पर आधारित संततता (Continuum) के गणात्मक और प्राकृत संख्याओं की राशि (१, २, ३,) के गणात्मक का अल्पबहुत्व पठन करने के लिये आग्रह करते हैं^१। (जिनागम प्रणीत अल्पबहुत्व एवं आधुनिक राशि सिद्धान्त के अल्पबहुत्व के तुलनात्मक अध्ययन के लिये सन्मति सन्देश, वर्ष १, अंक ४ आदि देखिए)।

संख्याओं के विभाजन का यह विषय लौकिक गणित का नहीं है, वरन् अलौकिक अथवा लोकोत्तर गणित का है, जैसा श्री अकलंक देव के तत्त्वार्थवार्तिक में उल्लेख है। यूनान में भी, पायथेगोरियन युग में मथीमतिकी (μαθηματική) शब्द का प्रयोग हुआ है, जिसके विभिन्न अर्थ लगाये जाते हैं, तथापि यह निश्चित है कि लोगिस्तिकी (λογιστική)—गणना कला तथा अर्थमतिकी (αριθμητική)—संख्या सिद्धान्त, ग्रीक गणित में मूलभूत था^२। प्लेटो ने कहा है—“But the art of calculation (λογιστική) is only preparatory to the true science; those who are to govern the city are to get a grasp of λογιστική, not in the popular sense with a view to use in trade, but only for the purpose of knowledge, until they are able to contemplate the nature of number in itself by thought alone.”^३

ज्यामिति अवधारणाएँ

ति. प. में प्रथम महाधिकार की गाथा ९१ से लेकर १३५ वीं गाथा तक, ज्यामिति अवधारणाओं को इस शैली से रखा गया है कि ये ४४ वाक्य अथवा सूत्र जैन सिद्धान्त शास्त्री के लिये इतने सुपरिचित प्रतीत होंगे कि उनका महत्व दृष्टिगोचर नहीं होगा। जैन सिद्धान्तों को न जाननेवाले के लिये ये इतने अपरिचित सिद्ध होंगे कि उन्हें भी ये महत्व-विहीन प्रतीत होंगे। इनसे परिचित कराने में तो

एक ग्रंथ बनाना पड़ेगा, तथापि, यहाँ बहुत ही संक्षेप में सार रूप वर्णन ही संलक्ष्य मात्र देने के लिये पर्याप्त होगा। अनेक पुद्गल परमाणु जितना आकाश व्याप्त करता है, उतने आकाशप्रमाण को प्रदेश कहा गया है। अमूर्त आकाश में इसके पश्चात् भेद की कल्पना का त्याग होना प्रतीत होता है, तथा मूर्त द्रव्य में ही भेद अथवा छेद की कल्पना के आधार पर मुख्य रूप से आकाश में प्रदेशों की कल्पना की गई है, जो अनुश्रेणिबद्ध है। आकाश जहाँ कथंचित् अखंड (Continuous) है, वहाँ कथंचित् प्रदेशवान भी है। इस प्रदेश (खंड, Point) के आधार पर, संख्याओं का निरूपण करने के लिये उपमा-मान भी स्थापित किये गये हैं। पल्योपम और सागरोपम उपमा प्रमाण समय की परिभाषा के आधार पर स्थापित किये गये हैं। चौथे महाधिकार में गाथा २८४, २८५ में समय का स्पष्टीकरण किया गया है। सूर्यगुल, प्रतरांगुल, जगश्रेणी, रज्जु आदि केवल एक महत्ता की सूचक नहीं हैं, वरन् जहाँ संख्या मान का प्रत्यक्ष होता है, वहाँ इनका अर्थ, इन लम्बाइयों में स्थित प्रदेश बिन्दुओं की गणात्मक संख्या है। एक रक्ष में अनन्त परमाणुओं के होने का अर्थ, संख्या प्ररूपणा के आधार पर, एक रक्ष (उपसन्नासत्र) की लम्बाई में स्थित प्रदेश बिन्दुओं की संख्या अनन्त नहीं है, वरन् कुछ और ही है। एक आवल्लिमें समयोंकी संख्या जघन्य युक्तासंख्यात होती है। इस प्रकार कथन कर, संख्या मान के लिये उपमा से काल प्रमाण और आयाम प्रमाण में सम्बन्ध स्थापित किया गया है।

$$\log_2 (अ)$$

$$(अ) = (प)$$

जहाँ अं, सूर्यगुलके प्रदेशोंकी गणात्मक संख्या है, प पल्योपम काल में स्थित समयोंकी संख्या है तथा अ, अर्द्धापल्य काल राशि (कुलक) में स्थित समयों की संख्या है। ऐसे प्रदेश की अवधारणा के आधार पर धर्मादि द्रव्यों में संख्या स्थापित कर, तथा शक्ति के अविभागी अंश के आधार पर केवल-ज्ञान आदि अनन्त राशियों की स्थापना कर, उनके सूदन विवेचनों को संख्या मान अथवा द्रव्यप्रमाण का विषय बनाया गया है।

आधुनिक गणितज्ञ बिन्दुकी परिभाषाको भी उपेक्षा करता है और बिन्दु कहलाई जानेवाली वस्तुओं की राशि से समारम्भ करता है। ऐसी अपरिभाषित वस्तुएँ एक उपराशि या उपकुलक (Subset) की रचना करती हैं जो सरल रेखा कहलाती है, इत्यादि। ऐसे अपरिभाष्य बिन्दु को लेकर, श्रोल्लेनोंके साध्य के आधार पर, जार्ज केन्टर ने अनन्त विषयक गणित की संरचना की, जिसे अमूर्त राशि सिद्धान्त (Abstract set theory) कहा जाता है। जार्ज केन्टर ने, परिमित और पारपरिमित (Trans finite) राशियों पर कार्य करने में असंख्यात की उपेक्षा की है। परन्तु, पारपरिमित गणात्मक संख्याओं के विभिन्न प्रकार बतलाये गये हैं। इस प्रकार, पारपरिमित गणात्मकों और अखण्ड फैलाव (Continuum) के सिद्धान्तों से प्राप्त गणितीय दक्षता, अमूर्त राशि सिद्धान्त को जन्म दे चुकी है, परन्तु उसकी वृहद संरचना करते समय, गणितज्ञों के सम्मुख विभिन्न मिथ्याभास (Paradox) उपस्थित हुए हैं, जिनका सर्वमान्य समाधान नहीं हो सका है। समाधान के लिये, इस शताब्दी में गणितीय दर्शन में विभिन्न विचारधाराओं के आधार पर परिगणित (Meta-mathematics) की संरचना, गणितीय तर्क के रूप में हो चुकी है। यह केवल प्रतीक रूप में है। ज़ीनों के तर्क भी सर्वमान्य समाधान को प्राप्त नहीं हो सके हैं, जहाँ परिमित रेखा में अनन्त विभाज्यता का खण्डन किया गया है। और मेरी समझ में अन्तिम दो तर्कों में समय की अवधारणा को अन्यथा युक्ति खंडन के आधार पर पुष्ट किया गया है^१। पायथेगोरियन युग में, बिन्दु की परिभाषा, “स्थिति वाली इकाई” थी। पायथेगोरियन सिद्धान्त के अनुसार, फिलोलस (Philolaus) ने कहा है “All things which can be known have

number; for it is not possible that without number. anything can either be conceived or known.^१

एरिस्टाटिल ने वस्तुओं के लक्षणों और संख्याओं के बीच दार्ष्टान्त^२ आधारित कर, पायथेगोरियन-सिद्धान्त को निम्न लिखित शब्दों में व्यक्त किया था—

“They thought they found in numbers, more than in fire, earth or water, many resemblances to things which are and become; thus such and such an attribute of numbers is justice, another is soul and mind, another is opportunity, and so on; and again they saw in number the attributes & ratios of the musical scales. Since, then, all things seemed in their whole nature to be the first things in the whole of nature, they supposed the elements of numbers to be the elements of all things, and the whole heaven to be a musical scale and a number.^३”

जहां यूक्लिड ने बिन्दु को भाग रहित, विमाओं रहित कहकर छोड़ दिया है, वहां पायथेगोरियन परिभाषा, “monad having position” बहुत कुछ वैज्ञानिक प्रतीत होती है। प्लेटो द्वारा प्रतिपादित “चौड़ाई रहित श्रेणि breadthless length” की परिभाषा प्लेटो ने स्वयं दी है, “That of which the middle covers the end” (i. e. to an eye placed at either end and looking along the straight line);.....^४

रूप (Figure) की परिभाषा मनोरंजक है, जिसे सुक्रात (Socrates) ने इस प्रकार कहा है, “Let us regard as figure that which alone of existing things is associated with colour.” यहां रंग (Colour) के विषय में विवाद उठने पर, सुक्रात का उत्तर यह है, “It will be admitted that in geometry there are such things as what we call a surface or a solid, & so on; from these examples we may learn what we mean by figure; figure is that in which a solid ends, or figure is the limit (or extremity, *περας*) of a solid.”^५

περας शब्द का उच्चारण परस होता है। यहां चौड़ाई रहित श्रेणि के समान ही एकानन्तकी परिभाषा वीरसेन ने दी है। रूपी अथवा मूर्तिक पदार्थों (पुद्गल) के विषय में अवधारणाएँ पठनीय हैं। इस प्रकार, यूनानी ज्यामिति में परिभाषाएँ, स्वसिद्ध; उपधारणाएँ, आधारभूत थीं जिनके विषय में वही कहा जाता है कि उन्हें पायथेगोरियन वर्ग ने खोजा था। जिस प्रकार जैनाचार्यों ने स्वलिखित ग्रंथों में आचार्य परम्परागत ज्ञान का ही आधार सर्वत्र लिया है^६, उसी प्रकार पायथेगोरियन वर्ग ही आविष्कारकों का नाम हुआ करता था^७।

१ Heath, vol. I, p. 67.

२. इस सम्बन्ध में घवलकार वीरसेन द्वारा उद्धृत अंक एवं रैखिकीय का निरूपण देखने योग्य है। षट्खंडागम (पु. १०) ४, २, ४, १७३; घृ. ४२१-४३०, (१९५४)। तेजस्कायिक, पृथ्वीकायिक, जलकायिक, जीवराशि की गणना भी त्रिलोक-प्रकृति आदि ग्रंथों में विस्तृत रूप से वर्णित है।

३ Heath, vol. I, Sc. 66.

४ Heath, vol. I. Sc. 293.

५ Heath, vol. I, Sc. 293.

६ ति. प. १, ८४.

७ Coolidge, p. 26.

पादयोगिनन वर्ग के विषय में प्लेटो के कुछ कथन अति मनोरंजक तथा ऐतिहासिक दृष्टि से महत्वपूर्ण हैं—

"They have in view practicality, and are always speaking in a narrow and ridiculous manner of squaring and extending and applying and the like..... Then, my noble friend, geometry will draw the soul towards truth and create the spirit of philosophy, and raise up that which is now, unhappily, allowed to fall down..... And do you not know also that although they make use of visible forms and reason on them they are thinking not of those but of the ideal which they resemble, not of the figures which they draw, but of the absolute square, the absolute diameter and so on..... And when I speak of the other division of the intelligible you will understand me to speak of that other sort of knowledge which reason herself attains by the power of dialectic, using the hypotheses, not as first principles, but as base hypotheses, in order that she may soar beyond them to the first principle of the whole, and clinging to this and then to that which depends on this by successive steps. She may descend again without the aid of any sensible object from ideas through ideas, and in ideas she ends."

उपर्युक्त वर्णन, ऐसा प्रतीत होता है, मानो आत्मा, आवत चतुर्माकार लोक (जिसका तल वर्गाकार होता है), दशरूप (जो घृताकार होता है) के विपरम, आदि के विषय में किया जा रहा हो। ब्रान्च में, यूनान का पादयोगिनन वर्ग अथवा ब्राह्म के दर्शनशास्त्री, गणित में क्या व्यावहारिक गमना के लिये रुचि रखते थे ? नहीं, वे ब्रान्चिक सत्य (absolute truth) के सम्बन्ध में ही रुचि रख कर, गमना करते थे ? यही भारतवर्ष में बोरसेन तथा यतिवृषभ के परिकर्म अथवा विषयक उल्लेख से प्रतीत होता है।

यदि सैनागम प्रगीत पुद्गल परमाणु के आधार पर कथंचित् प्रदेश सरचित आकाश की अवधारणाओं को लेकर आधुनिक स्वामिति क्षेत्र में नये मुलाव दिये जावे तो प्रश्न उठता है कि अविभागी पुद्गल परमाणु किसे माना जावे। अनन्तान्त पुद्गल परमाणुओं का एक क्षेत्रावगाही होना, स्पर्श (contact) के सिद्धान्त के लिये उपधारित हो, वह तो ठीक है, परन्तु क्या हम अणुविमर्जन विधियों से उस अन्तिम परमाणु को प्राप्त करने की क्षम सीमा तक पहुँच सकते हैं, अथवा नहीं ? डेन्टन का विचार है, "In fact, the ultimate particle of matter presents great difficulties; it need not be the electron—probably is not—but the atomic notion of the constitution of matter does surely demand an ultimate particle, and such reasoning as has been suggested shows that to this ultimate particle no properties of any sort—not even magnitude—can be assigned. The alternative of pushing the responsibility on to the last member of an unending series of particles can hardly be said to satisfy the mind which demands a clear physical conception of nature."

१ Coolidge, pp. 26, 27.

२ Coolidge, p. 24.

३ Denton, p. 42.

क्या यह पुद्गल परमाणु, वह है जिसे आधुनिक वैज्ञानिकों ने उपधारित किया है, “Besides possessing extension in space and time, matter possesses inertia. We shall show in due course *that inertia, like extension, is expressible in terms of the interval relation*; but that is a development belonging to a later stage of our theory. Meanwhile we give an elementary treatment based on the empirical laws of conservation of momentum and energy rather than any deep-seated theory of the nature of inertia.

For the discussion of space and time we have made use of certain ideal apparatus which can only be imperfectly realized in practice—rigid scales and perfect cyclic mechanisms or clocks, which always remain similar configurations from the absolute point of view. Similarly for the discussion of inertia we require some ideal material object, say a perfectly elastic billiard ball, whose condition as regards inertial properties remains constant from an absolute point of view. The difficulty that actual billiard balls are not perfectly elastic must be surmounted in the same way as the difficulty that actual scales are not rigid. To the ideal billiard ball we can affix a constant number, called the invariant mass, (proper mass) which will denote its absolute inertial properties; and this number is supposed to remain unaltered throughout the vicissitudes of its history, or, if temporarily disturbed during a collision, is restored at the times when we have to examine the state of the body.”^१ यहाँ, अचल मात्रा (invariant mass— m) तथा सापेक्ष मात्रा (relative mass— M) के विषय में, किये गये प्रयोगों के आधार पर मात्रा को शून्य से उत्पन्न करना तथा मात्रा को शून्य में बदल देना (विनष्ट कर देना) जैसी कल्पनाएँ पाठक न बना ले, उसके लिये हम अगला अवतरण पढ़ने के लिये बाध्य करते हैं—“It will thus be seen that although in the special problems considered the quantity m is usually supposed to be permanent, its conservation belongs to an altogether different order of ideas from the universal conservation of M .^२”

पुनः, क्या बिन्दु विद्युन्मय कण (Point Electron) को पुद्गल परमाणु कहा जाय, जिसके विषय में यह कहा गया है, “Accordingly, I am of opinion that the point-electron is no more than a mathematical curiosity, and that the solution (78.6) should be limited to values of r greater than a .^३” इसके विषय में अभी हम कहने में असमर्थ हैं। निश्चित कार्य हो जाने पर हम निर्धारण करेंगे।

इस प्रकार, आकाश में प्रदेशों की श्रेणियों मुख्य रूप से मानकर, विग्रहगति (कर्म निमित्तक योग)

१ Eddington, The mathematical Theory of Relativity, pp. 29, 30.

२ Eddington, p. 33.

३ Eddington p. 33.

इनके विषय में हम पाठकों का ध्यान प्रथम महाधिकार की १६८ वीं गाथा से लेकर, महाधिकार के अन्त तक गाथाओं के रैखिकीय निरूपण की ओर आकर्षित करते हैं। कहा नहीं जा सकता, कि ये रैखिकीय विधियाँ कहाँ तक पाँच साँदों सम्बन्धी उल्लेख हुए प्रश्न को सुलझा सकेंगी। समाधान अनुसंधान पर आश्रित है।

अंक गणना

इस ग्रन्थ से भी पूर्व के ग्रन्थों, अनुयोगद्वार सूत्र^१ (१०० ई०पू०), तथा षट्खण्डागम^२ में मनुष्य पर्याप्तों में मिथ्यादृष्टि मनुष्य द्रव्य प्रमाण की अपेक्षा से कोड़ाकोड़ाकोड़ि से ऊपर और कोड़ाकोड़ाकोड़ाकोड़ि से नीचे, अथवा छठवे और सातवें वर्गों के बीच की संख्या बतलाई गई है। यहाँ शून्य का स्थानार्हा पद्धति में प्रयोग किया गया है। भारतीय गणित में ऐसा निरूपण पूर्व के ग्रन्थों में अभी अन्यत्र कहीं नहीं दिखा है। बख्शाली हस्तलिपि में ० प्रतीक का प्रयोग शून्य (Emptiness) अथवा अग्राह्यता (Omission) के लिये हुआ प्रतीत होता है। वीरसेन के पूर्व के सूत्रों में कई शैलियों से संख्या का कथन किया गया है जिसके लिये सूत्र ५२, ७१, ७२ आदि देखने योग्य हैं^३। तिलोय-पण्णत्ति में प्रायः सभी स्थानों में स्थानार्हा पद्धति का उपयोग है। इसका कारण यह भी हो सकता है कि इसकी संरचना के समय तक दसार्हा संकेतना पूरी तरह उपयोग में आ चुकी थी। गाथा २०८ (चतुर्थ महाधिकार) में 'अचलात्म नामक काल की संकेतना दी गई है जो (८४)^४ × (१०)^५ प्रमाण वर्षों के तुल्य होता है^५। आगे निर्देशित किया है कि 'यह संख्यात काल वर्षों की गणना, उत्कृष्ट संख्यात की प्राप्ति तक ले जाना चाहिये। यह नहीं कहा जा सकता कि, आर्यभट्ट से भी पूर्व वर्गमूल या घनमूल निकालने की रीतियाँ भारत वर्ष में प्रचलित थीं, परन्तु तिलोय-पण्णत्ति तथा षट्खण्डागम में आये हुए उल्लेखों से प्रतीत होता है कि यहाँ ऐसे कथन भी थे, "जगश्रेणी को जगश्रेणी के बारहवें वर्गमूल से भाजित करने पर जो प्रमाण प्राप्त होता है वह वंशा पृथ्वी के नारकियों का प्रमाण होता है"^६।

यद्यपि यूनान में दशमलव पद्धति का प्रचलन ऐतिहासिक काल में सबसे पूर्व हुआ प्रतीत होता है, तथापि मिश्र में उनसे भी पूर्व दसार्हा पद्धति के आधार पर १, १०, १००, १००० आदि के लिये चिन्ह थे। इसी प्रकार बेबीलोन में भी दशमलव और षाष्टिक पद्धतियों पर संख्याओं के निरूपण के लिये चिन्ह थे। आर्कमिडीज पद्धति उल्लेखनीय है। (१०)^८ पर आधारित यह पद्धति काल के विषय में बड़ी संख्याओं की प्ररूपणा के लिये थी जिसके सम्बन्ध में कहा गया है, "This system was, however, a tour-de-force, and has nothing to do with the ordinary Greek numerical notation."^७

इन सबकी तुलना में उत्कृष्ट संख्यात, गणना द्वारा उत्पन्न करने की रीति, जो तिलोय-पण्णत्ति में वर्णित है, वह दूसरे ग्रंथों के आधार पर पाश्चात्यगोरिग्न युग की प्रतीत होती है। एक और नवीन रीति का वर्णन अत्यंत रोचक है। वह है वर्गण-संवर्गण विधि। इस विधि को शल्लका निष्ठापन विधि भी

१ अनु. सूत्र १४२.

२ द्रव्यप्रमाणानुगम

५ तिलोयपण्णत्ति २, ११६.

६ Heath, vol 1. p. 41.

२ द्रव्यप्रमाणानुगम (पु. ३) सूत्र ४५.

४ यह संकेतना वर्णन अनुयोगद्वारसूत्र में भी है, और उसका प्रचलन उससे भी पूर्व काल में हुआ होगा।

हो सकता है कि नवीं सदी में हुए महावीरचार्य और प्रायः ३०० वर्ष पूर्व हुए यतिवृषभ की गणनाविधियों में अन्तर रहा हो, तथापि यतिवृषभ कालीन जैनाचार्य का गणित ग्रंथ न होने से इस विषय में कुछ कहा नहीं जा सकता।

अन्त में, यह भी उल्लेखनीय है कि जैनाचार्यों की भांति यूनान में संख्याओं को 2^n के रूप में प्ररूपण करने का प्रचलन था। "The Neo-Pythagoreans improved the classification thus. With them the 'even-times even' number is that which has its halves even, and so on till unity is reached"; in short, it is a number of the form 2^n ."

बीजगणित

इस ग्रंथ में उपयोग में आये हुए प्रतीकों का उपयोग केवल संख्या निरूपण के लिये ही नहीं वरन् कुछ क्रियाओं के लिये भी हुआ है। वीरसेन द्वारा अर्द्ध-छेदों और वर्गशलाकाओं के प्रमाण को शब्दों में व्यक्त करना सरल सा प्रतीत होता है, तथापि यह कथन करना कि $\log_2 \log_2 Iij|^3$ राशि $Iij|^3$ से १ वर्ग स्थान भी ऊपर नहीं पहुँची है, वास्तव में यह निरूपण है^२ —

$$\log_2 \log_2 Iij|^3 = [Iij]^{Iij+1} \log Iij + (Iij+1) \log Iij + \log \log Iij$$

स्पष्ट है, कि ऐसे निरूपणों से भरे हुए इस ग्रंथ के रचने में वीरसेन के पास क्रियात्मक प्रतीकत्व अवश्य रहा होगा। यतिवृषभ के द्वारा जगध्रेणी का प्रतीक एक आड़ी रेखा होना, तथा उसके घन का \equiv रूप में प्ररूपित होना, नानाघाट शिलालेख काल से लेकर कुशन काल अथवा उससे भी बाद के क्षत्रप और आन्ध्र शिलालेख कालीन प्रतीत होता है। सबसे महत्वपूर्ण बात यह है, कि घटाने के लिये ऋण शब्द (रिण) का उपयोग, पृष्ठ ६०२ से लेकर ६१७ तक हुआ है। वस्त्राली हस्तलिपि में रिण के + उपयोग में लाया गया है। + प्रतीक की उत्पत्ति के विषय में विभिन्न मतों को हम प्रस्तुत करते हैं,

"The origin of the Bakhshali minus sign (+) has been the subject of much conjecture. Thibaut suggested its possible connection with the supposed Diophantine negative sign ϕ (reversed ψ , tachygraphic abbreviation for $\lambda\epsilon\iota\psi\sigma$ meaning wanting). Kaye believes it. The Greek sign for minus, however, is not μ but \uparrow . It is even doubtful if Diophantus did actually use it; or whether it is as old as the Bakhshali cross.⁴ Hoernle⁵ presumed the Bakhshali minus sign to be the abbreviation ka of the Sanskrit word kanita, or nu (or nu) of nyuna, both of which mean diminished and both of which abbreviations in the Brahmi characters would be denoted by a cross. Hoernle was right, thinks Datta,⁶ so far as he sought for the origin of + in a tachygraphic abbreviation of some Sanskrit word. But, as neither the word kanita or nyuna is found to have been used in the Bakhshali work in connection with the subtractive operation, Datta finally, rejects the theory of Hoernle and believes it to be the abbre-

viation ksa, from ksaya (decrease) which occurs several times, indeed, more than any other word indicative of subtraction. The sign for ksa, whether in the Brahmi characters or in Bakhshali characters, differs from the simple cross (+) only in having a little flourish at the lower end of the vertical line. The flourish seems to have been dropped subsequently for convenient simplification^१."

तिलोय-पण्णत्ती में उपयोग में आये हुए प्राकृत शब्द 'रिण' के आधार पर हम भी अपना सुझाव रख सकते हैं। + चिह्न, रिण शब्द के रि अक्षर से ब्राह्मी लिपि के अनुसार (१) लिया गया है। इस रिण शब्दको केवल परम्परागत आचार्यों द्वारा प्राप्त कार्य मार्गणाओं में स्थित जीवों की संख्या प्ररूपणा करने तथा उनमें अल्पवृद्धि दिखलाने के लिये प्रतीक निरूपण रूप में लिया गया है। हम यह कह सकते हैं कि रिण शब्द का उपयोग यतिवृषभ कालीन नहीं वरन् उनके पूर्व काल का है। इसके लिये प्रमाण हम और आगे चलकर बतलावेंगे। रिण शब्द का प्रयोग उस काल का निरूपण करता है जब कि + उपयोग में लाया गया होगा। और इस प्रकार रिण शब्द के उपयोग से, उपयोग में आये हुए अन्य प्रतीकों का काल निर्धारण हो सकता है। स्पष्ट है कि रिण शब्द से + धीरे धीरे किस प्रकार उपयोग में आने लगा होगा और यदि ऐसा हुआ है तो प्रतीकत्व का उपयोग बख्शाली काल से बहुत पूर्व का होना चाहिये। यह निर्णय करना भाषाविज्ञान ज्ञानियों के लिये है। उल्लेखनीय है कि धवलाकार बीरसेनाचार्य ने भी ऋग के लिये + प्रतीक का उपयोग किया है^२।

पुनः, चौथे महाधिकार में गथा १२८७ से लेकर १९९१ तक कोठों में शून्य का उपयोग क्या अग्राह्यता के लिये हुआ है, यह अभी नहीं कहा जा सकता। बख्शाली हस्तलिपि में भी ० का उपयोग खाली स्थान अथवा अग्राह्यता (omission) के लिये हुआ है। तथापि, शून्य का यह उपयोग खाली स्थान के लिये ही हुआ होगा, यह सम्भव प्रतीत होता है। भिन्न-भिन्न असंख्यात संख्याओं के निरूपण के लिये भिन्न-भिन्न प्रतीक लिये गये हैं। जैसे असंख्यात के लिये a, असंख्यात लोक प्रमाण राशि के लिये ९, तथा 'असंख्यात लोक ऋण एक' के लिये ८ को उपयोग में लाया गया है, इत्यादि। संख्यात के लिये... (यह चिह्न ति. प. पृ. ६०३ पंक्ति २ में देखिये) प्रतीक उपयोग में आया है। मिश्र में इसका उपयोग १०० के लिये प्रतीक रूप में हुआ है। मिश्र में खड़ी लकीर १ का, ग्रीस में खड़ी लकीर १० का निरूपण करती थी तथा ≡ ६० के लिये प्रतीक था। ९, १०० का प्रतीक था। आगे मू. अक्षर का उपयोग केवल निम्न लिखित स्थान में दिखाई देता है^३—

$$= \begin{array}{c} ५८६४ \\ ४१४६५६१ \\ ५ \end{array} \text{ रिण रा. } = \begin{array}{c} ४६५५३६ \\ \hline -२ \text{ मू. } \quad \frac{२}{१३ \text{ मू. }} \end{array} = \begin{array}{c} ४६५५३६१५ \end{array}$$

यह स्थापना कैसे उत्पन्न की गई है, यह समझने में हम अभी समर्थ नहीं हैं। तथापि, बख्शाली हस्तलिपि में मू. प्रतीक का उपयोग मूल के लिये हुआ है। इसी प्रकार यहाँ तथा और दूसरी जगह भी ८ का उपयोग योग के लिये किया गया प्रतीत होता है। ९ का अर्थ हम नहीं समझ सके हैं। इस प्रकार a, ८, ९ में यूनानी ब्लक दिखाई देती है, तथापि, निम्न लिखित अवतरण पढ़ना वाञ्छनीय है।

१ B. B. Datta & A. N. Singh Part I. PP. 14, 15.

२ षट्खंडागम पु. १०, ४, २, ४, ३२, पृ. १५१. ३ ति. प. भाग २, पंचम अधिकार, पृष्ठ ६०९.

गणितीय निरूपण प्राप्त होना था। यूनानमें गोलके सम्बन्धमें (पायथेगोरियन युग से अथवा उसके बाद के सूत्र को) प्ररूपणा है, तथा जैनाचार्यों द्वारा उसका उपयोग न करना इस बातका सूचक है कि उन्होंने जो कुछ किया वह उनकी स्वतः की मौलिक प्रतिभाका अंशदान था जिसके बहुत से उदाहरण घबला टीका तथा तिलोय-पणसिको मिले पड़े हैं। दृष्टिवाद अंगके आधार पर जम्बूद्वीपकी परिधिका उल्लेखितरूप में कथन ही इस बात का सूचक है कि तिलोय-पणसिकी सरचनाके पूर्व ही, $\sqrt{10}$ का उपयोग π के लिये हो चुका था^१। तथा ख ख पदसस्स पुटं का गुणकार 2.35482 निश्चित करना एक अति कठिन गणनाके आधार पर प्राप्त हुआ होगा^२। यदि यह गणना बौद्धायन के शुल्व सूत्र कालीन है तो बौद्धायन द्वारा निश्चित $\pi = 3.1416$, का मान इससे स्थूल है^३। यूनान में, आर्कमिडीज का प्रयत्न अति प्रशंसनीय माना जाता है। उसने π का मान इस रूपमें निश्चित किया था^४ :—

$$2.457 > \sqrt{3} > 2.454$$

तथापि, बीरसेनाचार्य द्वारा उपयोग में लाया गया सूत्र, ‘व्यास षोडशगुणित’..... चीन के त्सुचुंग चिह (Tsu-chung-chih) के द्वारा दिये गये π के प्रमाण से मिलता जुलता है, जो षोडश सहित को निकाल देने पर एक सा हो जाता है। वास्तव में यह अत्यंत सूक्ष्म प्रमाण है जहाँ $\pi = 3.141592653589793$ आदि प्राप्त होता है। इसकी विधि चीन में प्राप्य नहीं है, तथापि उसका उद्गम बीरसेनाचार्य द्वारा दिये गये सूत्र में निश्चय है। जहाँ बीरसेन ने यह सूत्र नवीं सदी में उल्लेखित किया है, वहाँ त्सु चुंग चिह ने प्रायः ४७६ ईस्वी पश्चात् में लिया है^५। इससे प्रतीत होता है, कि चीनियों ने

$$\frac{16 \text{ व्यास} + 16}{113} + 3 (\text{व्यास}) = \text{परिधि}$$

सूत्र को प्रथम पद में से १६ निकाल कर सुधार किया होगा। अथवा, भारत में वह सूत्र चीन से लिया गया हो, जो १६ अधिक होने से गलत रूप में सूत्र बढ हो गया हो। यह एक ऐतिहासिक महत्व रखता है तथा चीन से गणितीय सम्बन्ध की परम्परा स्थापित करता है^६।

तिलोय-पणसिकी के चतुर्थ अधिकार में गाथा १८० और १८१ में दिये गये सूत्र अति महत्वपूर्ण प्रतीत होते हैं। ये सूत्र, जीवा और घनुष का प्रमाण निकालने के लिये हैं, गणना $\sqrt{10}$ के आधार पर इन सूत्रों की सरचना का प्रमाण मिलता है। जीवा के विषय में विलकुल ऐसा ही सूत्र,^७

$$\text{जीवा} = \sqrt{4 \left[\left(\frac{\text{व्यास}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\text{व्यास}}{2} - \text{बाण} \right)^2 \right]}$$

रूप में, वेबीलोन में अभिलेखों के आधार पर २६०० वर्ष ईस्वी पूर्व उपस्थित होना, हमें आश्चर्य में डाल देता है।^८ जहाँ π का मान निश्चित रूप से ३ होना स्वीकृत हो चुका है^९ वहाँ पायथेगोरियन

१ जम्बूद्वीपप्रज्ञप्ति में कुल भिन्न मान हैं। भिन्नता हाथ प्रमाण से प्रारम्भ होती है और इसके पश्चात् प्रमाण का कथन नहीं है (१-२३)। २ ति. प. ४, ५५-५६. ३ Coolidge P. 15.

४ Coolidge P. 61.

५ Coolidge P. 61.

६ इस सूत्र की व्युत्पत्ति के सम्बन्ध में डा० अवधेशनारायणसिंह के विचार देखने योग्य हैं जो उन्होंने “वर्णा अभिनन्दन ग्रंथ”, सागर, (वीर नि. स० २४७६) में प्रकाशित अपने “भारतीय गणित के इतिहास के जैन-स्रोत” में पृष्ठ ५०३ पर व्यक्त किये हैं।

७ जम्बूद्वीपप्रज्ञप्ति में इस रूप में सूत्र मिलता है— जीवा = $\sqrt{4 \times \text{बाण} (\text{विष्कम्भ-बाण})}$ २-२३, ६-९.

८ Coolidge P. 7.

९ Coolidge P. 6.

साध्य के आधार पर इस सूत्र का होना उपयुक्त है। धनुष के सम्बन्ध में जैनाचार्यों द्वारा दिया गया सूत्र π का $\sqrt{10}$ मान लेने के आधार पर है, जो बेबीलोन में अप्राप्य प्रतीत होता है। सूत्रों की ऐसी क्रमबद्धता के आधार पर, मुझे ऐसा प्रतीत होता है मानो Cuneiform texts^१ की तिथि २६०० वर्ष ईस्वी पूर्व निश्चित करना शंकास्पद है। $\sqrt{10}$ का मान π रखकर, उपर्युक्त दो समीकारों द्वारा, कुछ ऐसे सम्बन्ध प्राप्त किये जा सकते हैं जो हाइजिन्स ने धनुष और जीवा के बीच, टेलर के साध्य के आधार पर प्राप्त किये हैं। आश्चर्य है कि महावीराचार्य ने इन सूत्रों को कुछ दूसरे ही रूप में दिया है^२।

$$\text{धनुष की लम्बाई} = \sqrt{4 (\text{बाण})^2 + (\text{जीवा})^2}$$

अवधा के क्षेत्रफल निकालने के लिये महावीराचार्य ने जो सूत्र दिया है,

$$\text{क्षेत्रफल} = (\text{जीवा} + \text{बाण}) \times \frac{\text{बाण}}{2}$$

वह चीन में चिउ-चांग सुआन चु (Chiu-Chang suan-chu) ग्रंथ से लिया गया प्रतीत होता है, जिसकी तिथि पुस्तकों के जलाये जाने की घटना के कारण निर्णीत नहीं हो सकी है। वहां, उनसे भी पूर्व के ग्रंथ तिलोय-गणनी में धनुषाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{\text{बाण} \times \text{जीवा}}{4} \sqrt{10}$ रूप में प्राप्त होना आश्चर्यजनक है^३। यूनान में, सिकन्दरिया के हेरन ने, इनके प्रमाण और कुछ प्राप्त किये हैं^४।

इनके पश्चात् महत्वपूर्ण सूत्र अनुपात सिद्धान्त (Theory of proportion) सम्बन्धी हैं। थतिवृषभ ने इन्हें, गाथा १७८१ (महाधिकार चौथा), से लेकर गाथा १७९७ तक शंकु समच्छिन्नकों (frustrums of cone) की पार्श्वसुजाओं (Slant lines) के सम्बन्ध में व्यक्त किये हैं^५। इनके सिवाय, वेत्रासन तथा अन्य आकार के वातवलय सम्बन्धी क्षेत्रों (लोक का वेष्टन करनेवाले क्षेत्रों) का घनफल निकालने में जो निरूपण दिया है वह सिकन्दरिया के हेरन (ईसा की तीसरी सदी) के $\beta\omega\mu\iota\sigma\chi\alpha\sigma\sigma$ सम्बन्धी घनफल के निरूपण की तुलना में किसी प्रकार कम नहीं है^६। इसके आधार पर वेत्रासन (छोटी वेदी) सदृश आकार के सांद्रों का वर्णन अन्य धर्मग्रंथों में भी मिलना मनोरंजक है, और उनमें सम्बन्ध स्थापित करना इतिहासकारों का कार्य है^७। पुनः लोक का घनफल विभिन्न आकारों के क्षेत्रों में व्यक्त करना अत्यन्त महत्वपूर्ण है, जो पायथेगोरियन कालीन विधियों से सम्पर्क स्थापित करने में सहायक सिद्ध हो सकता है। चौथे अधिकार में गाथा २४०१ आदि का निरूपण हेरन को Anchoring या tore की स्मृति स्पष्ट करती है^८।

हेरन ने शंकु समच्छिन्नक का घनफल दो विधियों से निकाला है, परन्तु बीरसेन ने शंक्वाकार सूर्यग रूप लोक की धारणा को अन्यथा सिद्ध करने के लिये जिस विधि का प्रयोग किया है, वह अन्यत्र देखने में

१ Coolidge P. 7.

२ जंबूद्वीपप्रज्ञप्ति में इसका मान $\sqrt{4 (\text{बाण})^2 + (\text{जीवा})^2}$ दिया है (२-३८, ६-१०)।

गणितसारसंग्रह अध्याय ७, सूत्र ४३.

३ ति. प. ४, २३७४.

४ Heath vol. (II) PP. 330, 331.

५ जंबूद्वीपप्रज्ञप्ति ३।२१३-२१४; ४।३९, १३४-१३५, १०।२१; १।२८.

६ जंबूद्वीपप्रज्ञप्ति में इस सम्बन्ध में दी गई विधि तिलोयगणनी में दी गई विधि के समान है (११-१०९).

७ गाथा २७० आदि, प्रथम महाधिकार ! Heath vol. (ii) P. 334.

नहीं आई है। उस विधि से, धनफल निम्न लिखित श्रेढि का योग निकालने पर प्राप्त होता है जो विलकुल ठीक है,

$$\pi \left(\frac{\text{व्या}_1}{2} \right)^2 \text{ उत्तरेध} + \left(\pi \cdot \text{व्या}_1 \cdot \frac{\text{व्या}_2 - \text{व्या}_1}{2^2} \right) \\ + \left(\pi \frac{\text{व्या}_2 - \text{व्या}_1}{2^2} \cdot \frac{\text{व्या}_2 - \text{व्या}_1}{2} \right) \\ + \left(\pi \frac{\text{व्या}_2 - \text{व्या}_1}{2^3} \cdot \frac{\text{व्या}_2 - \text{व्या}_1}{2^2} \cdot \frac{\text{व्या}_2 - \text{व्या}_1}{2} \right) + \dots \text{असंख्यात तक,}$$

क्योंकि अधिभागप्रतिच्छेदों की सख्या, अंतिम प्रदेश प्राप्त करने तक अनन्त नहीं हो सकती है^१। हम अभी नहीं कह सकते कि यह विदारण विधि यूनानियों की विधियों के आधार पर है अथवा सर्वथा मौलिक है। वीरसेन ने क्षेत्र प्रयोग विधि के आधार पर जो वीजीय समीकारों का रैखिकीय निरूपण दिया है वह भी क्या यूनानसे लिया गया है, यह भी हम नहीं कह सकते; क्योंकि हो सकता है कि पारपरिमित गणात्मक संख्याओंके निरूपण के लिये ये विधियाँ भारत में पहले भी प्रचलित रही हों^२।

ज्योतिष सम्बन्धी एवं अन्य गणनायें

त्रिलोक संरचना के विषय में कुछ भी कहना विवादास्पद है। यहाँ केवल दूरियों के कथन तथा विम्बों के अवस्थित एवं विचरण सम्बन्धी विवरण, पूर्वापर विरोध रहित एवं सुव्यवस्थित रखे गये हैं। रज्जु के कितने अर्द्धच्छेद लिये जायें, इस विषयमें वीरसेन अथवा यतिवृषभ ने विम्बों के कुल प्रमाण को परम्परागत ज्ञान के आधार पर सत्य मान कर, परिकर्म नामक गणित ग्रंथ में दिये गये कथन में 'रूपाधिक' का स्वटीकरण किया है। यह विवेचन वीरसेन अथवा यतिवृषभकी दक्षता का परिचय देता है। सातवें महाधिकार में चंद्रमा के विम्ब की दूरी एवं विष्कम्भ के आधार, आंख पर आपतित कोण का माप आधुनिक प्राप्त सूक्ष्म मापों से १० गुणा हीन है^३। गोलाई रूप चंद्रमा आदि के विम्बों का मानना, उनकी अवलोकन शक्ति का द्योतक है, क्योंकि ये विम्ब सर्वदा पृथ्वी की ओर केवल वही अर्द्धमुख रखते हुए विचरण करते हैं। सूर्य के विषय में आधुनिक धारणा ध्रुवों के आधार पर कुछ दूसरी ही है। उष्णतर किरणों तथा शीतल किरणों का क्या अर्थ है, समझ में नहीं आ सका है। इनका अर्थ कुछ और होना चाहिये, जिनके आधार पर, चंद्रमा आदि के गमन के कारण ही उसकी कलाओं का कारण सम्भवतः प्रकट हो सके (?) बृहस्पति से दूर मंगल का स्थित होना आधुनिक मान्यता के विपरीत है। गाथा ११७ आदि में समापन और असमापन कुंतल (Winding and Unwinding Spiral) में चंद्र और सूर्य का गमन, सम्भव है, आर्क मिडीज के लिये कुंतल के सम्बन्ध में गणना करनेके लिये प्रेरक रहा हो^४।

पायथेगोरसके विषयमें किसी सिकंदरियाके कवि ने प्रायः ३०० ई. पू. में कहा है—

“What inspiration laid forceful hold on Pythagoras when he discovered the subtle geometry of (the heavenly) spirals and com-

१ पट्खंडागम पु. ४, पृ. १५. २ पट्खंडागम पु. ३, पृ. ४२-४३. ३ ति. प. ७, ३९.

४ Heath vol (ii) 64. तथा मन्तर के शिल्प शास्त्र के आधार पर लिखे गये ग्रंथ, “The way of the Silpis” by G. K. Pillai (1948) के शिल्पीसूत्र में इस कुन्तल को यन्त्रस्थ सिद्ध किया गया है।

pressed in a small sphere the whole of the circle which the æther embraces.^१”

पुनः, निम्न लिखित अवतरण विचारणीय है :—

“As regards the distances of the sun, moon and planets Plato has nothing more definite than the seven circles ‘in the proportion of the double intervals, three of each’^२ : the reference is to the Pythagorean τετρακτύς represented in the annexed figure, ... what precise estimate of relative distances Plato based upon these figures is uncertain.^३”



विविध गणनायें, गणित के प्रसंगानुसार, सुव्यवस्थित एवं उपयुक्त हैं। ग्रहों के सम्बन्धमें, उनके गमनविषयक ज्ञान का कालवश विनष्ट होना बतलाया है, तथापि वह अपोलोनियस तथा हिपरखस की खोजों के आधार पर व्यवस्थित हो सकता है। जैनाचार्यों के चांद्र दिवस व मास के समान यूनान में भी एरिस्टारखस (Aristarchus) द्वारा २८१ अथवा ० ई. पू. में, और हिपरखस द्वारा १६१ ई. पू.—१२६ ई. पू. में चंद्र मास और चंद्र वर्ष की गणनाएँ की गई थीं। इसके सम्बन्ध में निम्न लिखित विचार पठनीय है।

“We now learn that the length of the mean synodic, the sidereal, the anomalistic and the draconitic month obtained by Hipparchus agrees exactly with Babylonian cuneiform tables of date not later than Hipparchus, and it is clear that Hipparchus was in full possession of all the results established by Babylonian astronomy^३.”

परन्तु ; जहाँ तक पायथेगोरियन युग के बाद की (ग्रेको कालीन एवं उपरान्त के) ज्योतिष का सम्बन्ध है, तिलोप-पण्णती सदृश मूल ग्रंथ, उस यूनानी ज्योतिष के प्रभाव से सर्वथा अछूते दृष्टिगत होते हैं। साथ ही, ऐसे ज्योतिष मूल ग्रंथों के भारतीय ज्योतिष के लिये प्रदत्त अंशदान सम्बन्धी विवेचन के लिये पाठकगण, ५० नेमिचंद्र जैन ज्योतिषाचार्य द्वारा लिखित “भारतीय-ज्योतिष का पोषक जैन-ज्योतिष” नामक लेख (जो ‘वर्णा अभिनन्दन ग्रंथ’ सागर में प्रकाशित हुआ है) देख सकते हैं। इस लेख में सुविष्ट लेखक मुख्यतः निम्न लिखित निष्कर्षों पर पहुँचे प्रतीत होते हैं।

- (१) पञ्चवर्षात्मक युग का सर्व प्रथमोरुलेख जैन ज्योतिष-ग्रंथों में प्राप्त होना।
- (२) अवम-तिथि क्षय सम्बन्धी प्रक्रिया का विकास जैनाचार्यों द्वारा स्वतन्त्र रूप से किया जाना।
- (३) जैन मान्यता की नक्षत्रात्मक ध्रुवराशि का वेदाङ्गज्योतिष में वर्णित दिवसात्मक ध्रुवराशि से सूक्ष्म होना तथा उसका उत्तरकालीन राशि के विकास में सम्भवतः सहायक होना।
- (४) पर्व और तिथियों में नक्षत्र लाने की विकसित जैन प्रक्रिया, जैनैतर ग्रंथों में छठी शती के बाद दृष्टिगत होना।
- (५) जैन ज्योतिष में सम्बत्सर सम्बन्धी प्रक्रिया में मौलिकता होना।

(६) दिनमान प्रमाण सम्बन्धी प्रक्रिया में, पितामह सिद्धान्त का जैन प्रक्रिया से प्रभावित प्रतीत होना ।

(७) छाया द्वारा समय निरूपण का विकसित रूप इष्ट काल, भयाति आदि होना ।

यहां मन्सर (सम्भवतः ५००-७०० ईस्वी पश्चात् अथवा इससे कुछ पूर्व ?) के शिल्प शास्त्र पर आधारित श्री पिछई के खोजपूर्ण ग्रन्थ, "The way of the Silpis" (1948) में वर्णित ज्योतिष सम्बन्धी खोजों का उपर्युक्त के साथ तुलनात्मक अध्ययन सम्भवतः उपयोगी सिद्ध हो ।

इनके अतिरिक्त आतप और तम क्षेत्र तथा चक्षुस्पर्शवान् सम्बन्धी कथन, गणना के क्षेत्र में उल्लेखनीय हैं । इन सब अवधारणाओं के हेतुओं का सिद्धान्तबद्ध स्पष्टीकरण करना, इस दशा में अशक्य है ।

मुख्यतः त्रिलोकप्रशस्ति विषयक गणित का यह कार्य, परम श्रेय्य डॉ. हीरालाल जैन के सुसंसर्ग में समय समय पर प्रबोधित होकर रचित हुआ है । उनके प्रति तथा जिन सुप्रसिद्ध निस्पृही लेखकों के ग्रंथों की सहायता लेकर यह कार्य किया गया है उनके प्रति भी हम आभार प्रकट करते हैं ।

निर्देशित ग्रंथ एवं ग्रंथकारों की सूची —

- (१) श्री यतिवृषभाचार्य विरचित तिलोप-पणक्ती भाग १, २.
सम्पादक प्रो. हीरालाल जैन, प्रो. ए. एन्. उपाध्ये, १९४३, १९५०.
- (२) श्री धवला टीका समन्वित पट्खंडागम पुस्तक ३, पुस्तक ४.
सम्पादक हीरालाल जैन, १९४१, १९४२.
- (३) A History of Geometrical methods, by Julian Lowell Coolidge Edn. 1940.
- (४) A History of Greek Mathematics, part I & II,
by sir thomas Heath. Edn. 1921.
- (५) History of Hindu Mathematics, Part I & II.
by Bibhutibhusen Datta, & Awadhesh Naryansingh,
Edn. 1935, 1938.
- (६) Abstract Set theory, by Abraham A. Fraenkel,
Edn. 1953.
- (७) The Mathematical Theory of Relativity by
A. S. Eddington Edn. 1923.
- (८) The Development of Mathematics by E. T. Bell.
Edn. 1945.
- (९) तत्त्वार्थराजवार्तिक, 'श्री अकलंकदेव'
- (१०) Relativity and commonsense.
by F. M. Denton.

तिलोय-पण्णत्ती

(प्रथम महाधिकार गा. ९१)

जगश्रेणी का मान ७ राजू होता है। राजू एक असंख्यात्मक दूरी का माप है। इसीलिये जगश्रेणी को दर्शाने के निमित्त ग्रंथकार ने प्रतीक की स्थापना की जो कि अंग्रेजी के Dash (—) के समान है। इस जगश्रेणी का घन करने पर लोकाकाश का घनफल प्राप्त होता है। जगश्रेणी का घन ग्रंथकार ने एक के नीचे एक स्थापित तीन आड़ी रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया है (≡)। इन तीन आड़ी रेखाओं का अर्थ तीन जगश्रेणी नहीं, किन्तु जगश्रेणी का घन होता है। परस्पर गुणन के लिये यह प्रतीक असाधारण है। ≡ १६ ख ख ख इस प्रतीक के स्पष्टीकरण का निम्न प्रकार से अनुमान किया जा सकता है। ≡ यह लोकाकाश की स्थापना है जो एक (१) है। लोकाकाश सहित पांच द्रव्य ६ हुए, जिसकी स्थापना १ के बाद है। तत्पश्चात् ख ख ख की स्थापना अनन्तान्त अलोकाकाश के लिये है, जिसके बहुमध्य भाग में यह लोकाकाश स्थित है। बहुमध्य भाग के कथन से यह अर्थ निकलता है कि अनन्तान्त रूप में विस्तृत आकाश का मध्य निश्चित किया जा सकता है। तात्पर्य यह कि अनन्तान्त एक बिल्कुल ही अनिश्चित प्रमाण नहीं माना गया, जैसी कि आज के गणितज्ञों की धारणा है^१।

(गा. १, ९३-१३२)

जगश्रेणी का प्रमाण प्रदर्शित करने के लिये [जो कि एक दिश माप (Linear Measure) है], अन्य सात मापों की परिभाषायें दी गई हैं। दूरत्व के माप के लिये उवसन्नासन्न नाम से प्रसिद्ध एक स्कंध अथवा उसके विस्तार को दूरत्व की इकाई (Unit) माना गया है। इस स्कंध की रचना नाना प्रकार के अनन्तान्त परमाणु^३ द्रव्यों से होती मानी गई है। इस स्कंध के अविभागी अंश को भी परमाणु

१ इस सम्बन्ध में आक्सफोर्ड के प्रसिद्ध गणितज्ञ F. H. Bradley के विचार निम्न प्रकार हैं—

"We may be asked whether Nature is finite, or infinite..... if Nature is infinite, we have the absurdity of a something which exists, and still does not exist. For actual existence is, obviously, all finite. But, on the other hand, if Nature is finite, then Nature must have an end, and this again is impossible. For a limit of extension must be relative to an extension beyond. And to fall back on empty space will not help us at all. For this (itself a mere absurdity) repeats the dilemma in an aggravated form. But we can not escape the conclusion that Nature is infinite..... Every physical world is essentially and necessarily infinite." The Encyclopedia Americana, Vol. 15, p. 121, Edn. 1944.

२ "With the intrusion of irrational numbers to disrupt the integral harmonics of the Pythagorean cosmos, a controversy that has raged of and on for well over two thousand years began; is the mathematical infinite a safe concept in mathematical reasoning, safe in the sense that contradictions will not result from the use of this infinite subject to certain prescribed conditions? (The 'infinities' of religion and philosophy are irrelevant for mathematics)"—Development of Mathematics, E. T. Bell, Page 548.

३ ग्रंथकार द्वारा प्रतिपादित परमाणु का अर्थ अन्यथा न ले लिया जावे, तथैव श्री जी. आर. जैनी की Cosmology Old and New के ९४वें पृष्ठ पर दिया गया यह अवतरण पढ़ना लाभदायक होगा—

"It follows that a paramanu can not be interpreted and should not be inter-

कहा गया है और एक स्कंध के अर्द्ध भाग को देश तथा चतुर्थ भाग को प्रदेश कहा गया है। स्कंध के अविभागी अर्थात् जिसका और विभाग न हो सके ऐसे अंश को परमाणु कहा है (गाथा ९५)। यह परमाणु आकाश के जितने क्षेत्र को घेरे (रोके) उसको प्रदेश कहते हैं^१।

अन्य मापों का निरूपण इस भांति है —

८ उवसन्नासन्न स्कंध	=	१ सन्नासन्न स्कंध
८ सन्नासन्न स्कंध	=	१ वृद्धिरेणु स्कंध
८ वृद्धिरेणु "	=	१ त्रसरेणु "
८ त्रसरेणु "	=	१ रथरेणु "
८ रथरेणु "	=	१ उत्तम भोगभूमि का बालाग्र
८ उ. भो. वा.	=	१ मध्यम भोगभूमि " "
८ म. भो. वा.	=	१ जघन्य " " "
८ ज. भो. वा.	=	१ कर्मभूमि का बालाग्र
८ कर्मभूमि के बालाग्र	=	१ लीक
८ लीक	=	१ ऊँ.
८ ऊँ.	=	१ जी
८ जी	=	१ अंगुल

इस परिभाषा से प्राप्त अंगुल, सूची अंगुल (सूच्यंगुल) कहलाता है, जिसकी संदष्टि (Symbol) २ मान ली गई है। यह अंगुल उत्सेध सूच्यंगुल भी कहा जाता है, जिसे शरीर की ऊँचाई आदि के प्रमाण जानने के उपयोग में लाते हैं।

पांच सौ उत्सेध अंगुलों का एक प्रमाणानुल माना गया है जिससे द्वीप, समुद्र, नदी, कुलाचल आदि के प्रमाण लेते हैं।

एक और प्रकार का अंगुल, आत्मांगुल भी निश्चित किया गया है जो भरत और ऐरावत क्षेत्रों में होनेवाले मनुष्यों के अंगुल प्रमाणानुसार भिन्न भिन्न कालों में भिन्न भिन्न हुआ करता है। इसक द्वारा छोटी वस्तुओं (जस श्वारा, तामर, चामर आदि) की सख्यााद का प्रमाण बतलाते हैं।

जहा जिस अंगुल की आवश्यकता हो, उस लेकर निम्न लिखित प्रमाणों का उपयोग किया गया है —

६ अंगुल = १ पाद ; २ पाद = १ वितस्ति ; २ वितस्ति = १ हाथ ; २ हाथ = १ रिक्कू ;
 २ रिक्कू = १ दण्ड ; १ दण्ड या ४ हाथ = १ धनुष = १ मूसल = १ नाली ;
 २००० धनुष = १ क्रोश ; ४ क्रोश = १ योजन.

interpreted as the atom of modern Chemistry, although originally the word was invented by the Greek philosopher Democritus (420 B.O.) to denote something which could not be sub-divided (atom— α , not; $\tau\epsilon\mu\epsilon\nu$ I cut).....But since the atom of chemistry has now been proved to be a Conglomeration of proton, neutrons and electrons, I venture to suggest that Paramanus are really these elementary particles which exist by themselves, or if at any future date a subelectron were to be discovered that should then be interpreted as the Paramanu of the Jains."

१ प्रदेश की (त्रिविम आकाश (Three Dimensional Space) की इकाई माना गया है जिसे पदार्थों का क्षेत्रमाप लेने के उपयोग में लाते हैं।

इसके आगे, बद्धने के पहिले यह आवश्यक प्रतीत होता है कि इस योजन की दूरी आज-कल के रेखिक माप में क्या होगी ?

यदि हम २ हाथ = १ गज मानते हैं तो स्थूल रूप से १ योजन ८००००० गज के बराबर अथवा ४५४५'४५ मील (Miles) के बराबर प्राप्त होता है।

यदि हम १ कोश को आजकल के मील के समान ले, तो १ योजन ४००० मील (Miles) के बराबर प्राप्त होता है।

कर्मभूमि के बालाग्र का विस्तार आज-कल के सूक्ष्म यंत्रों द्वारा किये गये मापों के अनुसार ८१ इंच से लेकर ८१ इंच तक होता है। यदि हम इस प्रमाण के अनुसार योजन का माप निकाले तो उपर्युक्त प्राप्त प्रमाणों से अत्यधिक भिन्नता प्राप्त होती है। बालाग्र का प्रमाण ८१ इंच मानने पर १ योजन ४९६४८'४८ मील प्रमाण आता है। कर्मभूमि का बालाग्र ८१ इंच मानने से योजन ७४४७२'७२ मील के बराबर पाया जाता है। बालाग्र को ८१ इंच प्रमाण मानने से योजन का प्रमाण और भी बढ़ जाता है।

ऐसी स्थिति में, हम १ योजन को ४५४५'४५ मील मानना उपयुक्त समझकर, इस प्रमाण को आगे उपयोग में लावेंगे।

(गा. १, ११६ आदि)

पल्य की संख्या निश्चित करने के लिये ग्रंथकार ने यहाँ वेलन (घ. २१ पर आकृति-१ देखिये) का घनफल निकालने के लिये सूत्र दिया है जो $\pi r^2 h$ के ही समान है। प्रथम, लम्ब वर्तुलाकार ठोस वेलन के आधार का क्षेत्रफल निकालने के लिये उसकी परिधि को प्राप्त किया है। परिधि को प्राप्त करने के लिये व्यास को $\sqrt{१०}$ से गुणित किया है, अर्थात् $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ की निष्पत्ति को $\sqrt{१०}$ माना है, जो ३'१६२२... के बराबर प्राप्त होता है। इसका उपयोग प्रायः सभी जैन शास्त्रों में जहाँ वृत्त क्षेत्र का गणित आया है, किया गया है। ईसा से सहस्रों वर्ष पूर्व भी इस प्रमाण के भिन्न भिन्न रूप उपयोग में लिये गये। ईसासे १६५० वर्ष पूर्व मिश्र के आहमस के पेपीरसमें इस प्रमाण को ३'१६०५ लिया गया है। भास्कराचार्य ने भी स्थूल मान के लिये $\sqrt{१०}$ उपयोग किया है।

१ एच. टी. कालब्रुक ने अनुमान रूप से लिखा है —

"Brahmgupta gave $\sqrt{10}$ which is equal to 3.1622..... He is said to have obtained this value by inscribing in a circle of unit diameter regular polygons of 12, 24, 48 and 96 sides & calculating successively their perimeters which he found to be $\sqrt{9.66}$, $\sqrt{9.81}$, $\sqrt{9.86}$, $\sqrt{9.87}$ respectively and to have assumed that as number of sides is increased indefinitely, the perimeter would approximate to $\sqrt{10}$ ".—

ब्रह्मगुप्त (६२८ वाँ सदी) और भास्कर (११५० वीं सदी) की बीजगणित के अनुवाद में पृष्ठ ३०८ अध्याय १२ वा अनुच्छेद ४०.

ऐसा प्रतीत होता है कि ग्रीस में एंटीफोन के द्वारा ईसा से प्रायः ४०० वर्ष पूर्व दी गई Method of Exhaustion (निश्चेषण की रीति) से भारतीयों ने प्रेरणा ली है; क्योंकि, श्री सेनकोर्ड ने लिखा है—

"This was the method of exhaustion, due in all probability to Antiphon (C 430 B. C). This method was developed in connection with the 'quadrature' of the circle. It consisted of doubling & redoubling the number of sides of a regular inscribed polygon, the assumption being that, as this process continued, the

जितना गुणनफल प्राप्त हो उतने समयों का एक उद्धार पत्योपम माना गया है। यह गुणनफल राशि उद्धार पत्य कही गई है।

और फिर अद्दा पत्य = (उद्धारपत्य राशि \times असंख्यात वर्षों के समयों की राशि)

जितना गुणनफल प्राप्त हो उतने समयों का एक अद्दा पत्योपम माना गया है और इस गुणनफल राशि को अद्दा पत्य माना गया है। इसे पत्य भी कहा गया है। इसके आगे —

१० कोड़ाकोड़ी व्यवहार पत्योपम = १ व्यवहार सागरोपम

१० कोड़ाकोड़ी उद्धार पत्योपम = १ उद्धार सागरोपम

१० कोड़ाकोड़ी अद्दा पत्योपम = १ अद्दा सागरोपम

(गा. १, १३१)

अब सूर्यगुलादि का प्रमाण निकालने के लिये अर्द्धच्छेद का उपयोग किया है। यह रीति गुणन को अत्यन्त सरल कर देती है। छेदागणित का^१ प्रचुर उपयोग नवीं सदी के वीरसेनाचार्य द्वारा धवला टोका में हुआ है। आजकल की संकेतना में^२ यदि किसी राशि y (x) के अर्द्धच्छेद प्राप्त करना हो तो—
 y के अर्द्धच्छेद = $\log_2 y$ अथवा $\log_2 x$ होंगे।

वास्तव में किसी संख्या के अर्द्धच्छेद उस संख्या के बराबर होते हैं जितने बार कि हम उसका अर्द्धन कर सकें। उदाहरणार्थ, यदि हम $2^x = y$ लें तो y के अर्द्धच्छेद x होंगे।

यदि अद्दापत्य के अर्द्धच्छेद $\log_2 P$ से दर्शाया जाय, (जहां P अद्दापत्य है) तो

$$\text{जगश्रेणी} = [\text{घनांगुल}]^{(\log_2 P / \text{असंख्यात})}$$

$$\text{और सूर्यगुल} = [P]^{(\log_2 P)}$$

इस तरह से प्राप्त सूर्यगुल का प्रतीक पहिले की भांति २ और जगश्रेणी का प्रतीक एक आड़ी रेखा (—) दिया है। जगश्रेणी का मान इस सूत्र से निकाला जा सकता है, पर प्रश्न उठता है कि

१ जैनाचार्यों के द्वारा उपयोग में लाये गये छेदागणित को यदि आजकल की Logarithms (Gk : logos = reckoning, arithmos = number) की गणित का सर्वप्रथम और कुछ दृष्टियों से सद्य रूप कहा जाय तो गलत न होगा। इस गणित के दो स्वतंत्र आविष्कारक माने जाते हैं— एक तो स्काटलैंड के बेरन नेपियर (१५५०—१६१७) और दूसरे प्रेंस देश के जे. बर्जी (१५५२—१६३२)। इस गणित के आविष्कार के विषय में गणित इतिहासकार सेनफोर्ड का मत है, “The discovery of logarithms, on the other hand, has long been thought to have been independent of contemporary work, and it has been characterised as standing isolated, breaking in upon human thought abruptly without borrowing from the work of other intellects or following known lines of mathematical thought.”

—A short history of mathematics, P. 193.

२ आज की संकेतना में यदि बेरन नेपियर के अनुसार n के Logarithm के प्रमाण को दर्शाया जाय तो वह $10^n \log_e (10^n \cdot n^{-1})$ होगा। यहाँ, प्रोफेसर ग्लेफेयर क शब्दों में यह अभिव्यञ्जना स्पष्टतर हो जावेगी।

“The numbers which indicate (in the Arithmetical Progression) the places of the terms of the Geometrical Progression are called by Napier, the logarithm of those terms.”—Bulletin of Calcutta Mathematical Society vol. VI. 1914-15.

असंख्यात वर्षों की राशि कितनी ली जाय, क्योंकि असंख्यात कोई विशिष्ट संख्या नहीं है, किन्तु सीमा रूप दो असंख्यात संख्याओं के बीच में रहनेवाली कोई भी संख्या है।

(गा. १, १३२)

इसके पश्चात् प्रतरांगुल = (सूच्यगुल)^२ = ४ (प्रतीक रूपेण)

और घनागुल = (सूच्यगुल)^३ = ६ (प्रतीक रूपेण)

इस स्पष्टीकरण से ज्ञात होता है कि लिये हुए प्रतीकों में साधारण गणित की क्रियायें उपयोग में नहीं लाई गईं, जैसे सूच्यगुल का प्रतीक २, तो सूच्यगुल के घन का प्रतीक ८ नहीं, अपितु ६ लिया गया। इसी प्रकार जगप्रतर का प्रतीक (=) और जगश्रेणी का घन लोक होता है, जिसका प्रतीक (≡) है। इस प्रकार की प्रतीक-पद्धति के विकास को हम जर्मनी के नेसिलमेन के शब्दों में Syncopated और Symbolic Algebra का मिश्रण कह सकते हैं।

इसके पश्चात् राजू^१ का प्रमाण = $\frac{\text{जगश्रेणी}}{७}$

१ Raju (=Chain, a linear astrophysical measure), is according to Colebrook, the distance which a Deva flies in six months at the rate of 2,057, 152 Yojanas in one क्षण, ie. instant of time.

—Quoted by von Glassnappin

“Der Jainismus”.

—Foot Note—Cosmology Old & New p. 105,

इस परिभाषा के अनुसार राजू का प्रमाण इस तरह निकाला जा सकता है— ६ माह = (५४००००) × ६ × ३० × २४ × ६० प्रति विपलाश या क्षण

क्योंकि, ६० प्रति विपलांश = १ प्रति विपल

६० प्रति विपल = १ विपल

६० विपल = १ पल

६० पल = १ घड़ी = २४ मिनट (कला)

∴ १ मिनट (कला) = ५४०००० प्रतिविपलांश

और १ योजन = ४५४५'४५ मील (या क्रोशक) लेने पर,

∴ ६ माह में तय की हुई दूरी = ४५४५'४५ × २०५७१५२

× ६ × ३० × २४ × ६० × ५४०००० मील

∴ १ राजू = (१'३०८६६६२'...) × (१०)^{२१} मील

श्री जी. आर. जैनी ने डॉ. आईसटीन के संख्यात (Finite) लोक की त्रिज्या लेकर उसका घनफल निकाल कर लोक के घनफल (३४३ घन राजू) के बराबर रखकर राजू का मान १.४५ × (१०)^{२१} मील निकाला है जो उपर्युक्त राजू मान से लगभग मिलता है। पर डॉ. आईसटीन के संख्यात फैलनेवाले लोक की कल्पना को पूर्ण मान्यता प्राप्त नहीं है— वह केवल कुछ उपधारणाओं के आधार पर अवलम्बित है। भिन्न २ कल्पनाओं के आधार पर भिन्न २ लोकों (universes) की कल्पनायें कई वैज्ञानिकों ने की हैं।

रिसर्च स्कालर पंडित माधवाचार्य ने राजू की परिभाषा निम्न तरह से कही है— “एक हजार भार का लोहे का गोला, इंद्रलोक से नीचे गिरकर ६ मास में जितनी दूर पहुँचे उस सम्पूर्ण लम्बाई को एक राजू कहते हैं।” —अनेकान्त vol. 1, 3.

इस तरह दी गई परिभाषा से राजू की गणना नहीं हो सकती, क्योंकि इन्द्रलोक से वस्तुओं (Bodies) के गिरने का नियम ज्ञात नहीं है।

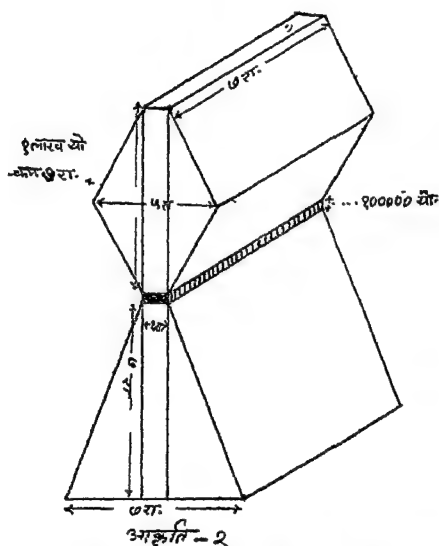
प्रतीक रूप में राजू को (७) लिखा जाता है ।

(गा. १, १४९-५१)

वर्ग आधार पर स्थित त्रिलोक के चित्र के लिये आकृति-२ देखिये—

स्केल - $\frac{1}{2}$ से मी = १ रा.

यहां, ऊर्ध्व लोक,



मध्यलोक (काले रंग द्वारा प्रदर्शित)
१००००० यो. × १ रा. × ७ रा.,

एवं अधोलोक स्पष्ट है ।

बाह्य ७ रा. अर्थात् ७ राजू है । ऊँचाई १४ राजू है । ऊर्ध्वलोक की ऊँचाई ७ रिण जो. १००००० लिखा है । अर्थात् ग्रंथकार के समय में ऋषण के लिये कोई प्रतीक नहीं रहा होगा, ऐसा प्रतीत होता है । ऋषण और धन के लिये क्रमशः आड़ी रेखा (-) और (+) प्रतीकों के आविष्कार का श्रेय बर्मनी के जे. विडमेन (१४८९) को है । ग्रंथकार ने दूसरी जगह रिण के लिये रि. का उपयोग भी किया है । धवलाकार वीरसेन ने मिश्र शब्द के लिये + प्रतीक दिया है^२ ।

(गा. १, १६५)

अधोलोक का धनफल निकालने के लिये लम्ब संक्षेत्र (Right Prism) का धनफल निकालने का सूत्र दिया है, जिसका आधार समलम्ब चतुर्भुज है । वह सूत्र है— (आधार का क्षेत्रफल × संक्षेत्र की ऊँचाई) = संक्षेत्र का धनफल । आधार का क्षेत्रफल निकालने का सूत्र दिया गया है :

$$\left[\frac{\text{मुख} + \text{भूमि}}{२} \times (\text{इन दो समांतर रेखाओं की लम्ब दूरी}) \right]$$

१ मिल देश के गिज़े में बने हुए महास्तूप (Great Pyramid) से यह लोकाकाश का आकार किंचित समानता रखता हुआ प्रतीत होता है । विशेष सहस्रम्बन्ध के विवरण के लिये सम्मति सन्देश, वर्ष १, अंक १३ आदि देखिये ।

२ षट्बुद्धागम पुस्तक ४, पृष्ठ ३३०, ई. स. १९४२.

यह गृह आज भी उपयोग में लाया जाता है ।

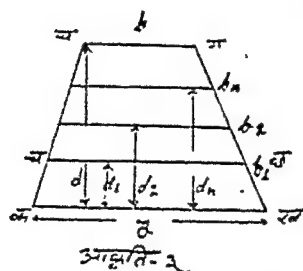
(गा. १, १६६)

दशोलोक का घनफल = $\frac{1}{3} \times$ पूर्ण लोक का घनफल^१ ।

(गा. १, १६९)

ऊर्ध्वलोक का घनफल भी इसी विधि के आधार पर दो क्षेत्रांशों में विदीर्ण कर निकाला गया है ।

(गा. १, १७६-७९)



इन गाथाओं में^२ समानुपाती भागों के सिद्धान्त का उपयोग है^३ ।

आकृति ३ में कल ग घ एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें कल और ग घ समांतर हैं तथा कघ और खग समांतर हैं । कल का माप a और घग का माप b है । ऊर्ध्व भूमि और घग मुख है ।

यदि ऊपर से उर्ध्व के समांतर d_1 ऊँचाई पर मुख की प्राप्ति करना हो तो खल दिया है,

$$a - \left[\frac{a-b}{d} \right] d_1 = b_1 \text{ जहाँ } b_1 \text{ चर है ।}$$

इसी प्रकार, $a - \left[\frac{a-b}{d} \right] d_2 = b_2$ और साधारण रूप से,

१ लघुश्रीयप्रश्न ११, १०९-१०.

२ ये विविध और नियम ब्रह्मसूत्रप्रश्न में भी उल्लेखित हैं । १।२७ ; ४।३९ ; १०।२१.

३ समानुपात के सिद्धान्त के आधार के सम्बन्ध में निम्नलिखित उल्लेखनीय है,

"It is true that we have no positive evidence of the use by Pythagoras of proportions in geometry, although he must have been conversant with similar figures, which imply some theory of proportion".

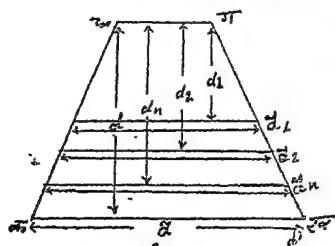
एतः, "The anonymous author of a scholium to Euclid's Book V, who is perhaps Proclus, tells us that 'some say' that this Book, containing the general theory of proportion which is equally applicable to geometry, arithmetic, music and all mathematical science, 'is the discovery of Eudoxus, the teacher of Plato.' 3—Heath, Greek Mathematics, Vol. I, pp. 85 & 325, Edn. 1921.

साथ ही, कम से कम २१३ ईस्वी पूर्व के अभिलेखों के आधार पर, इस सम्बन्ध में चीनी अभिज्ञान पर कूलिज का अभिमत यह है,

"The Chinese, be it noted, were familiar with the properties of similar triangles and invented many problems connected with them".

—Coolidge, A History of Geometrical Methods, p. 22, Edn. 1940

$a - \left[\frac{a-b}{d} \right] d_n = b_n$, जहाँ d_n कोई भी हल्छित ऊँचाई है, और मुख b_n है।



आकृति-४

इसी प्रकार आकृति-४ में वही आकृति है और घग के समांतर किसी विवक्षित निचाई पर भूमि निकालने का साधारण सूत्र लिखा जा सकता है।

$$b + \left[\frac{a-b}{d} \right] d_n = a_n.$$

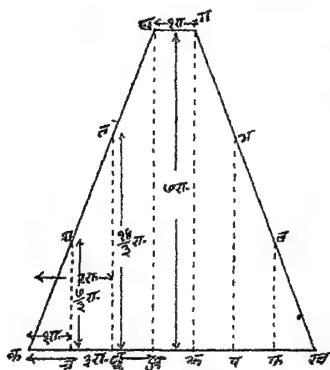
इस प्रकार, भूमि ७ राजु (१ जगश्रेणी) तथा मुख १ राजु लेकर ग्रंथकार ने ऊँचाई सात राजु को १ राजु प्रमाण से विभक्त कर सात पृथिव्यों प्राप्त कर

उनके मुख और भूमि उपर्युक्त सूत्र से निकाले हैं। फिर, उनका घनफल अलग अलग लम्ब संक्षेत्र (जिसका आधार समलम्ब चतुर्भुज है) सूत्र द्वारा निकाला है। इस रीति से कुल घनफल का योग १९६ घन राजु बतलाया है।

(गा. १, १८८-८३)

अधोलोक का घनफल एक और रीति से निकालकर बतलाते हैं। आकृति ५ में लोक के अंत

संकेत:- १ c.m. = १ राजु



आकृति-५

अर्थात् क ख से दोनों पादर्वभागों अर्थात् क घ और ख ग की दिशाओं से, क्रमशः ३ राजु, २ राजु और १ राजु भीतर की ओर प्रवेश करने पर उनकी क्रमशः ७ राजु, $\frac{1}{3}$ राजु और $\frac{1}{3}$ राजु ऊँचाईयों प्राप्त होती हैं।

इस प्रकार यह क्षेत्र, भिन्न भिन्न आकृतियों के क्षेत्र में विभक्त हो जाता है। ये आकृतियाँ त्रिभुज और समलम्ब चतुर्भुज हैं, तथा मध्य क्षेत्र आयत ज क्ष ग घ है। ऐसे क्षेत्रों के क्षेत्रफल निकालने के लिये दो सूत्र दिये गये हैं^१।

त्रिकोण क च थ का क्षेत्रफल निकालने के लिये समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालने के उपयोग में लाये जानेवाले सूत्र का उपयोग है^२।

१ इस सम्बन्ध में मिश्र में प्रचलित विधि के विषय में यह विवादास्पद मत है—

"The triangles in their pictures look like long and undernourished isosceles triangles, and some commentators have assumed that the Egyptians believed that the area of an isosceles triangle is one-half the product of two unequal sides."

—Coolidge, A History of Geometrical Methods, p 10, Edn. 1940.

२ इस सूत्र को महावीरचर्या ने गणितसारसंग्रह के सातवें अध्याय में ५० वीं गाथा द्वारा निरूपित किया है।

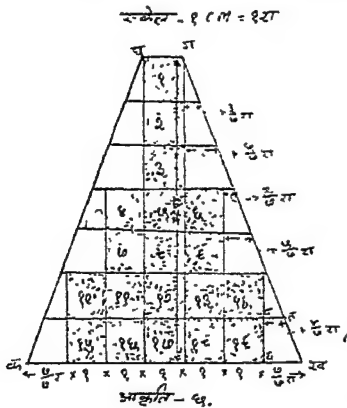
यहाँ भुजा क च मान ली जाय तो सम्मुख भुजा शून्य होगी और ऊँचाई च थ होगी, इसीलिये इस समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 10 = 5$ वर्ग राजु प्राप्त होता है। दूसरा गृह इस प्रकार है—
लम्ब बाहु युक्त क्षेत्र क च थ है। यहाँ व्यास क च तथा लम्ब बाहु च थ मान लेने पर, क्षेत्रफल $=$
 $\frac{\text{व्यास}}{2} \times \text{लम्बबाहु}$ होता है।

शेष क्षेत्रों के लिये “भुज-पडिभुजमिद्वन्द्वं.....” सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है।

इस प्रकार क च थ प्रथम अर्धतर क्षेत्र, च छ त थ द्वितीय, और छ ज घ त तृतीय अर्धतर क्षेत्र हैं जिनके क्षेत्रफल क्रमशः ५, ३ और ३ वर्ग राजु हैं। चूँकि प्रत्येक का बाह्य ७ राजु है इसलिये इन तीनों क्षेत्रों का (जो बाह्य लेने से साद्र सक्षेत्रों (लम्ब सक्षेत्र) में बदल जाते हैं उनका) घनफल क्रमशः ८, २४ और ४० घन राजु होता है। इसी तरह, पूर्व पार्श्व ओर से लिये गये क्षेत्रों का घनफल होता है। शेष मध्य क्षेत्र का घनफल $1 \times 7 \times 7 = 49$ घन राजु होता है। सबका योग करने पर १९६ घन राजु अधोलोक का घनफल प्राप्त होता है।

(गा. १, १८४-१९१)

अधोलोक का घनफल निकालने के लिये तीसरी विधि भी है (आकृति-६ देखिये)।

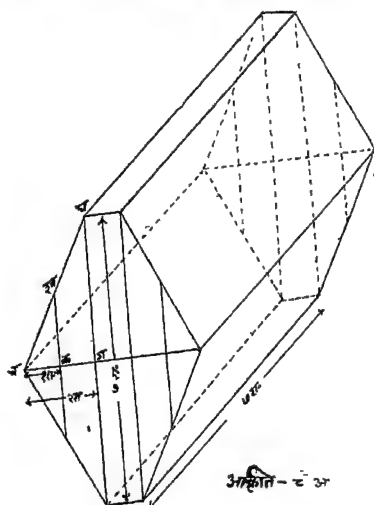
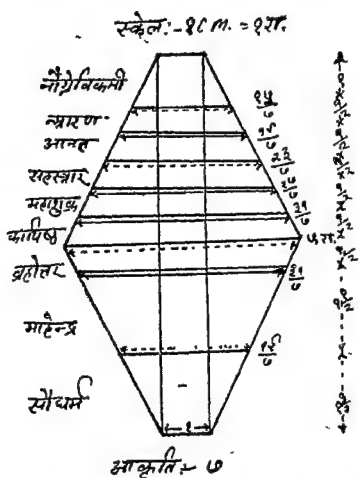


इस प्रशंसनीय विधि में क्षेत्र क ख ग घ में से १ वर्ग राजुवाले १९ क्षेत्रों को अलग निकाल कर शेष आकृतियों का क्षेत्रफल निकाला गया है और अंत में प्रत्येक के ७ राजु बाह्य से उन्हें गुणित कर अंत में सबका योग कर अधोलोक का घनफल निकाला गया है। आकृति में छाया वर्ग अलग दर्शाये गये हैं और बची हुई भुजायें समानुपात के प्रमेय द्वारा निकाल कर क्रमशः ऊपर से दोनों पार्श्वों में ३, ३, ३, ३, ३, ३ तथा अंत में ३ या १ राजु प्राप्त की गई हैं। लोक के अंत की आकृति ख त थ द का क्षेत्रफल =

$[\{ (३ + ३) \div २ \} \times ७]$ वर्ग राजु है, और घनफल $= \{ (३ + ३) \div २ \} \times १ \times ७$ घन राजु है। इसी प्रकार, समस्त शेष क्षेत्रों का घनफल, ६१ घन राजु प्राप्त होता है। इसमें, १९ वर्ग क्षेत्रों का घनफल $१९ \times ७ = १३३$ घन राजु जोड़ने पर, कुल १९६ घन राजु, अधोलोक का घनफल प्राप्त होता है।

(गा. १, १९३-१९९)

समानुपात के नियम के अनुसार भूमि से १३, १३, ३, आदि ऊँचाइयों पर उपर्युक्त नियम द्वारा विभिन्न मुखों के प्रमाण निकाले गए हैं जो आकृति-७ में दिये गये हैं। इसी प्रकार, यहाँ समलम्ब चतुर्भुज आधारवाले ९ लम्ब संक्षेत्र प्राप्त होते हैं जिनके घनफलों का योग करने पर ऊर्ध्व लोक का घनफल १४७ घन राजु प्राप्त होता है।



(गा. १, २००-२०२)

(आकृति-८ में) पूर्व और पश्चिम से क्रमशः १ राजु और २ राजु ब्रह्म स्वर्ग के उत्तमि भाग से प्रवेश करने पर सप्तमोत्सेध क्रमशः क ख = ७ राजु और ग व = ३ राजु प्राप्त होते हैं। शेष प्रक्रिया इस प्रकार है कि च क ख क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= १ \times \frac{७}{२} \times ३$$

∴ च क ख संक्षेत्र का घनफल

$$= १ \times \frac{७}{२} \times ३ \times ७ = \frac{१४७}{२} = ६३ \frac{१}{२}$$

घन राजु

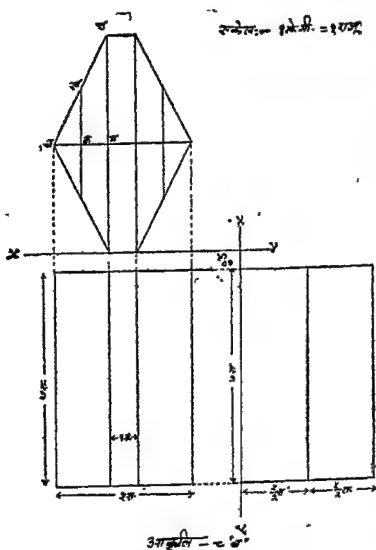
इसी तरह संक्षेत्र क ख ग का घनफल

$$= \left[\frac{७+३}{२} \right] \times १ \times ७$$

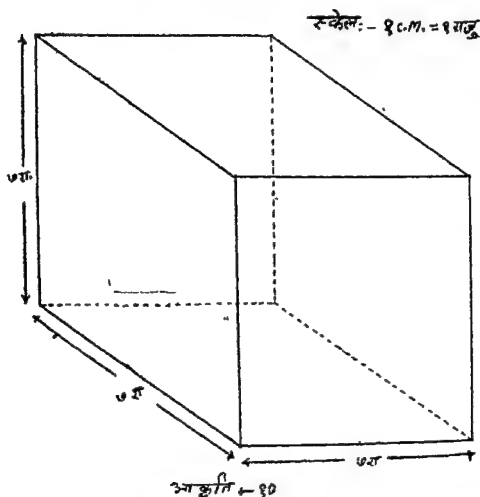
$$= १८ \frac{१}{२} \text{ घन राजु}$$

$$= ३ \text{ (संक्षेत्र च क ख)}$$

इनके योग का चौगुना करके उसमें अवशेष मध्यभाग का घनफल जोड़ कर ऊर्ध्व लोक का घनफल निकाला गया है।

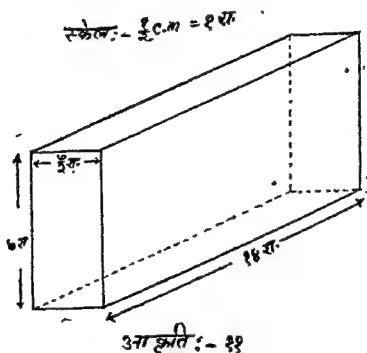


यहाँ सांद्र घन क्षेत्रों को समान घनफलवाले अन्य नियमित सांद्र क्षेत्रों में बदलकर, तत्कालीन क्षेत्रमिति और सांद्र रेखिकी का प्रदर्शन किया गया है। सम्पूर्ण लोक को आठ प्रकार के समान घनफल (३४३ घन राजु) वाले सांद्रो (Solids) में परिणत किया है। इनमें से बिन क्षेत्रों का रूप चित्रों द्वारा प्रदर्शित किया गया है, वे अनुमान से बनाये गये हैं, क्योंकि मूल गाथा में इन क्षेत्रों के केवल नाम दिये गये हैं, चित्र नहीं।



(१) सामान्य लोक—
इसका वर्णन पहिले ही दे चुके हैं। चित्रण के लिये आकृति-२ देखिये।

(२) घनाकार सांद्र—
यह आकृति-१० में दर्शाया गया है। इसका घनफल = $७ \times ७ \times ७ = ३४३$ घनराजु है।

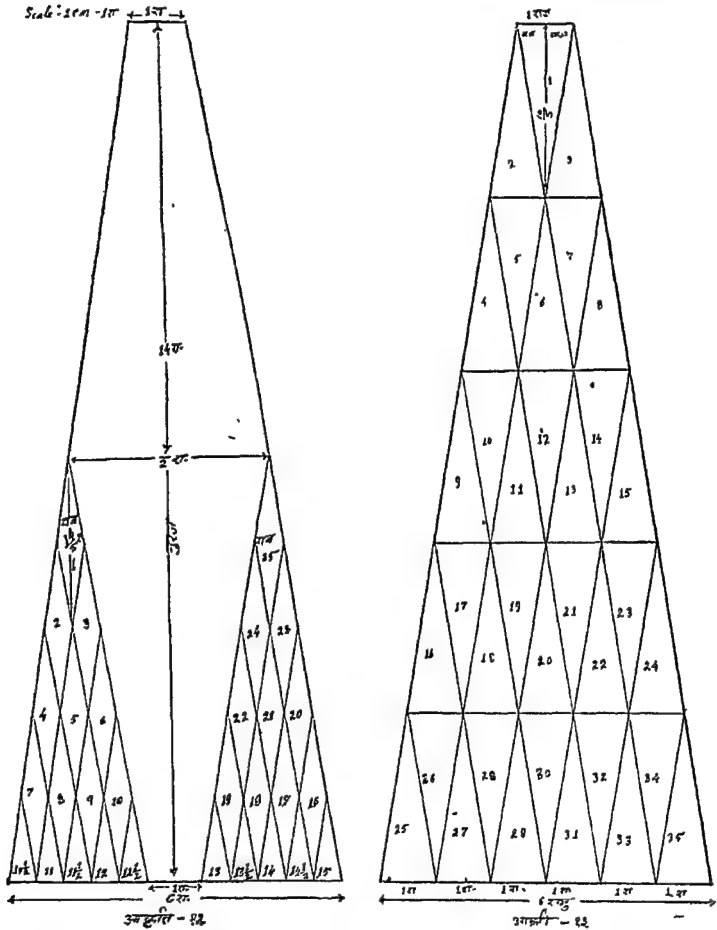


(३) तिर्यक्आयत चतुरस्र या Cuboid (आयतज)—इसका घनफल $३३ \times ७ \times १४$ या ३४३ घन राजु है। (आकृति ११ देखिये)

(गा. १, २१७-१९)

(४) यवमुरज क्षेत्र—(आकृति-१२ देखिये) । यह आकृति, क्षेत्र के उदग्र समतल द्वारा प्राप्त छेद (Vertical Section) है । इसका विस्तार ७ राजु यहाँ चित्रित नहीं है ।

$$\text{यहाँ मुरज का क्षेत्रफल } \left\{ \left(\frac{११}{२} \text{ रा} + १ \text{ रा} \right) \div २ \right\} \times १४ \text{ रा} = \left\{ \frac{१३}{२} \times \frac{१४}{२} \right\} \times १४ \\ = \frac{१३}{२} \times \frac{१९६}{२} = \frac{६३७}{२} \text{ वर्ग राजु}$$



इसलिए, मुरज का क्षेत्रफल = $\frac{६३७}{२} \times ७ = \frac{४४५९}{२}$ घन राजु = २२० $\frac{१}{२}$ घन राजु ।

एक यव का क्षेत्रफल ($\frac{११}{२}$ रा. $\div २$) $\times \frac{१४}{२}$ राजु = $\frac{१३}{२} \times \frac{१४}{२} = \frac{१९६}{२}$ वर्ग राजु,

इसलिये, २५ यव का क्षेत्रफल = $\frac{१९६}{२} \times २५ = \frac{४९००}{२}$ वर्ग राजु;

इस प्रकार २५ यव का क्षेत्रफल = $\frac{४९००}{२} \times \frac{१९६}{२} = \frac{४९०० \times १९६}{४}$ घन राजु = १२२५ घन राजु ।

(५) यवमध्य क्षेत्र—(पृ. ३१ पर आकृति-१३ देखिये) । यह आकृति, क्षेत्र के उदग्र समतल द्वारा प्राप्तछेद (Vertical section) है । इसका आगे-पीछे (उत्तर-दक्षिण) विस्तार ७ राजु यहाँ चित्रित नहीं है ।

यहाँ, यवमध्य का क्षेत्रफल $(१ \div २) \times \frac{१५}{६} = \frac{५}{२}$ वर्ग राजु,

इसलिये, ३५ यवमध्य का क्षेत्रफल $= \frac{५}{२} \times \frac{३५}{६} = ४९$ वर्ग राजु;

इस प्रकार, ३५ यवमध्य का घनफल $= ४९ \times ७$ घन राजु $= ३४३$ घन राजु;

और, एक यवमध्य का घनफल $= \frac{३४३}{३५} = ९९\frac{३}{५}$ घन राजु ।

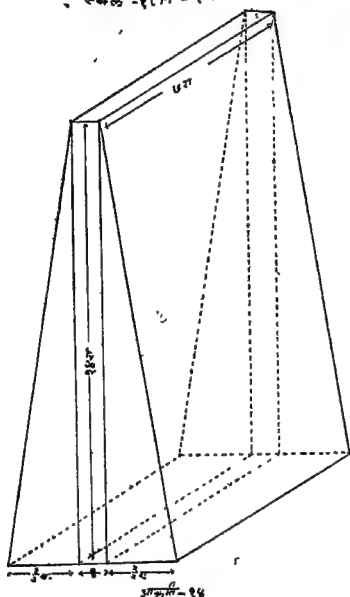
इस गाथा के उपरान्त दिया गया निदर्शन $\frac{३५}{३५} || \frac{३५}{३५} || \frac{३५}{३५} ||$ इस चित्र से ही स्पष्ट है । $\frac{३५}{३५}$ एक

यवमध्य का घनफल है तथा $\frac{३५}{३५} || \frac{३५}{३५} || \frac{३५}{३५} ||$ का अर्थ यह है कि १४ राजु ऊँचाई को पाँच बराबर भागों में विभक्त कर ३५ यवमध्यों को प्राप्त करना है ।

(गा. १, २२०)

(६) मन्दराकार क्षेत्र—(आकृति-१४ देखिये) । इस क्षेत्र की भूमि ६ राजु, मुख १ राजु, ऊँचाई १४ राजु, और मुड़ाई ७ राजु ली गई है ।

स्केल - १८०० = १८०



पुनः, समानुपात के सिद्धान्तों के द्वारा क्रमशः भूमि से $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६}$, $\frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६}$, $\frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६}$, $\frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६}$ और अंत में $\frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६} + \frac{१}{६}$ राजुओं की ऊँचाईयों पर मुखों के विस्तार निकाले हैं । ये ऊँचाईयों साधित करने पर, क्रमशः $\frac{१}{६}$, $\frac{२}{६}$, $\frac{३}{६}$, $\frac{४}{६}$ और $\frac{५}{६}$ अर्थात् १४ राजु प्राप्त होती हैं । [यहाँ २२१ से २२४ वीं गाथाओं का स्पष्टीकरण बाद में करेंगे ।]

ऐसे मन्दराकार क्षेत्र का घनफल $= \frac{३४३}{३५} \times १४ \times ७ = ३४३$ घन राजु है । दूसरी रीति से, इस क्षेत्र को ऊपर दी गई ऊँचाईयों पर विभक्त करने से ६ क्षेत्र प्राप्त होते हैं ।

जब ऊँचाई ३ राजु ली जाती है तो उस ऊँचाई पर व्यास उपर्युक्त नियम के अनुसार $६ - \left[\frac{६-३}{३} \right] \times \frac{३}{३} = \frac{३-१}{३}$ राजु प्राप्त होता है। इसी प्रकार जब ऊँचाई ३ या २ राजु ली जाती है तो विस्तार $६ - \left\{ \left(\frac{६-३}{३} \right) \times २ \right\}$ अर्थात् $\frac{३०}{३}$ या $\frac{२६}{३}$ राजु प्राप्त होता है। इस प्रकार, इसी विधि से उन भिन्न भिन्न ऊँचाइयों पर विस्तार क्रमशः $\frac{३०}{३}$, $\frac{२६}{३}$, $\frac{२२}{३}$, $\frac{१८}{३}$ प्राप्त होते हैं। अन्तिम माप, $\frac{१८}{३}$ अर्थात् १ राजु, मंदराकार क्षेत्र का मुख है और भूमि $\frac{२३}{३}$ या ६ राजु है। इस प्रकार प्राप्त विभिन्न क्षेत्रों के घनफल निम्न लिखित रीति से प्राप्त करते हैं।

$$\text{प्रथम क्षेत्र का घनफल} = \frac{३}{२} \left[\frac{१२६}{२१} + \frac{११६}{२१} \right] \times \frac{३}{३} \times ७ = \frac{४८४}{९} \text{ घनराजु।}$$

$$\text{द्वितीय क्षेत्र का घनफल} = \frac{३}{२} \left[\frac{११६}{२१} + \frac{१११}{२१} \right] \times \frac{३}{३} \times ७ = \frac{२२७}{९} \text{ घनराजु।}$$

$$\text{तृतीय क्षेत्र का घनफल} = \frac{३}{२} \left[\frac{१११}{२१} + \frac{३९९}{८४} \right] \times \frac{३}{३} \times ७ = \frac{८४३}{१६} \text{ घनराजु।}$$

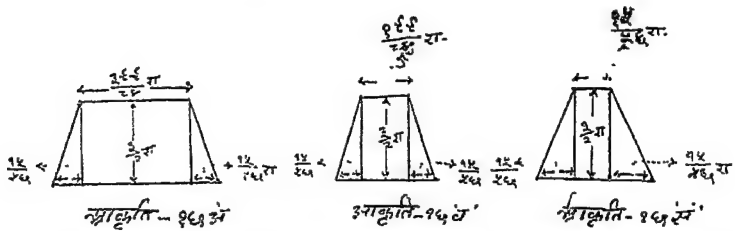
$$\text{चतुर्थ क्षेत्र का घनफल} = \frac{३}{२} \left[\frac{३९९}{८४} + \frac{२४४}{८४} \right] \times \frac{३}{३} \times ७ = \frac{१९९३३}{१४४} \text{ घनराजु।}$$

$$\text{पंचम क्षेत्र का घनफल} = \frac{३}{२} \left[\frac{२४४}{८४} + \frac{१९९}{८४} \right] \times \frac{३}{३} \times ७ = \frac{४४३}{१६} \text{ घनराजु।}$$

$$\text{षष्ठम क्षेत्र का घनफल} = \frac{३}{२} \left[\frac{१९९}{८४} + \frac{८४}{८४} \right] \times \frac{३}{३} \times ७ = \frac{६५०९}{१४४} \text{ घनराजु।}$$

इन सबका योग ३४३ घनराजु प्राप्त होता है। वह प्रमाण सामान्य लोक के घनफल के तुल्य है।

तृतीय और पंचम क्षेत्र के घनफलों को प्राप्त करने की विधि मूल गाथा से नहीं मिलती है। इसका स्पष्टीकरण करते हैं (आकृति-१६ 'अ', 'ब' देखिये) —



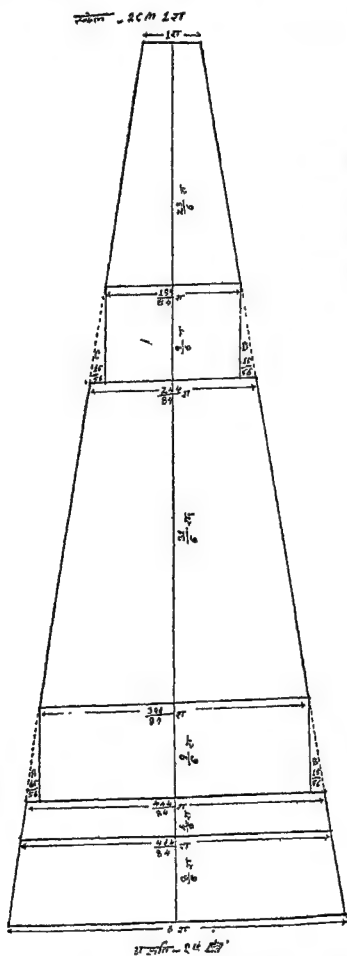
तृतीय क्षेत्र और पंचम क्षेत्र में से अंतर्वर्ती करणाकार क्षेत्रों को अलग कर, एक जगह स्थापित करने से, निम्न लिखित आकृति प्राप्त होती है,

$$\text{जिसका घनफल} = \frac{१}{२} \left[\frac{१४}{५६} + \frac{४४}{५६} \right] \times \frac{३}{२} \times ७ = \frac{४४}{२} \text{ घनराजु प्राप्त होता है। आकृति-१६ 'स' देखिये।}$$

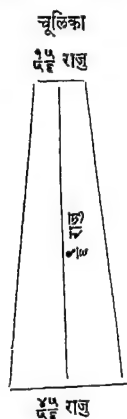
इस प्रकार ग्रंथकार ने तृतीय और पंचम क्षेत्रों में से चार ऐसे त्रिभुजों को (जिनकी : $\frac{३}{१६}$ योजन लम्बाई और $\frac{३}{१६}$ योजन ऊँचाई है) निकाल कर, अलग से, मंदराकार क्षेत्र में सबसे ऊपर स्थापित किया है। तृतीय क्षेत्र में से जब $२ \times \left(\frac{३९}{१६} \times \frac{३}{१६} \right) \times \frac{३}{२} \times ७$ अर्थात् $\frac{४४}{२}$ घन राजु घटाते हैं तो $\frac{६४३}{१६} - \frac{४४}{२}$

अर्थात् $\frac{3}{2} \times 2$ घन राजु बच रहता है। यही प्रमाण मूलगाथा में दिया गया है^१। इसी प्रकार पंचम क्षेत्र में से $2(\frac{1}{2} \times 3) \times \frac{1}{2} \times 3$ अर्थात् $\frac{9}{2}$ घन राजु घटते हैं तो मूलगाथानुसार $\frac{3}{2} \times 3 - \frac{9}{2}$ अर्थात् $\frac{3}{2}$ घन राजु प्राप्त होते हैं। अंतिम उपरिम भाग में स्थित क्षेत्र का घनफल $\frac{3}{2}$ रहता है। इस प्रकार, कुल घनफल ३४३ घन राजु प्राप्त किया गया है।

(गा. १, २२०-२३१)



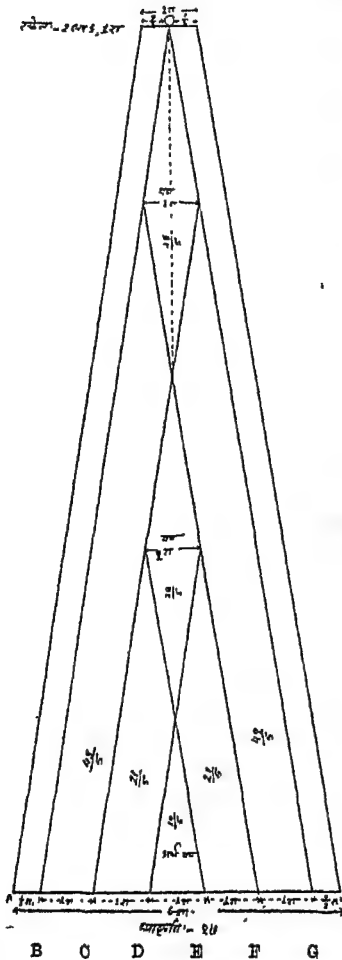
यहाँ आकृति-१५ मन्दराकार क्षेत्र का उदग्र छेद (vertical section) है। त्रिभुज क्षेत्र A, B, C, D. से यह चूलिका बनी है, प्रत्येक त्रिभुज क्षेत्र का आधार $\frac{1}{2}$ राजु तथा ऊँचाई ३ राजु है।



इन चार त्रिभुज क्षेत्रों में से तीन क्षेत्रों के आधार से चूलिका का आधार ($\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$) बना है और एक त्रिभुज क्षेत्र के आधार से चूलिका की चौड़ी की चौड़ाई $\frac{1}{2}$ राजु बनी है।

^१ मूल में दिये हुए प्रतीको (२२० वीं गाथा) का स्पष्टीकरण इस तरह से हो सकता है।
३-१५ का अर्थ $\frac{3}{18} \times 3$ ऊँचाई और $\frac{15}{392} \times 3$ आधार है। समलम्ब चतुर्भुज के चित्र का (शेष पृ. ३५ पर देखिये)

(गा. १, २३२-३३)



(७) दूष्य क्षेत्र— यह आकृति-१७ कथित क्षेत्र का उदय छेद (vertical section) है। इसके आगे पीछे (उत्तर दक्षिण) के विस्तार ७ राज का चित्रण यहाँ नहीं हुआ है।

बाहरी दोनों प्रवण क्षेत्रों का घनफल $\frac{1}{2}$ राज \times १४ राज $\times ७ \times २$ is $O J A B + O I H G = ९८$ घनराज।

भीतरी दोनों प्रवण क्षेत्रों का घनफल $\frac{1}{2} \times ७ \times २ \times K O B + Y K F G = \frac{56}{2} = २८$ घन राज।

दोनों लघु प्रवण क्षेत्रों का घनफल $\frac{1}{2} \times ७ \times २ L N D C + M N E F = \frac{56}{2} = २८$ घन राज।

यव क्षेत्र = $\frac{1}{2}$ यव का घनफल $O X K Y + K L N M + N D E (\frac{56}{2} + \frac{56}{2} + \frac{56}{2}) + ७ = \frac{56}{2} \times ७ = ४९$ घनराज।

(गा. १, २३४)

(८) गिरिकटक क्षेत्र— पाचवीं आकृति, यव मध्य क्षेत्र, को देखने पर ज्ञात होता है कि उसमें २० गिरिया हैं। एक गिरि का घनफल $\frac{1}{2}$ घनराज है, इसलिये २० गिरियों का घनफल $२० \times \frac{1}{2} = १०$ घन राज प्राप्त होता है। ३५ यवमध्यों का घनफल ३४३ घन राज आता है जो (२० गिरियों के समूह में शेष उरटी गिरियों के घनफल को मिला देने पर) कुल गिरिकटक क्षेत्र का मिश्र घनफल कहा गया है। इस प्रकार हमें गिरिकटक क्षेत्र और यवमध्य क्षेत्र के निरूपण में विशेष भेद नहीं मिल सका है।

अर्थ इस भाति है कि भूमि ६ योजन को $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ भागों, १ भाग और $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ राज्यों में विभक्त किया है। अँचाई को समान रूप से विभक्त करने पर विस्तार ३ राज लिखा हुआ है और १४ राज अँचाई को ७, ७ राज में विभक्त कर लिखा गया है।

प्र. $\frac{1}{2} - २।१$ का अर्थ $\frac{1}{2} \times ७ \times २, \frac{1}{2} \times ७ \times २$

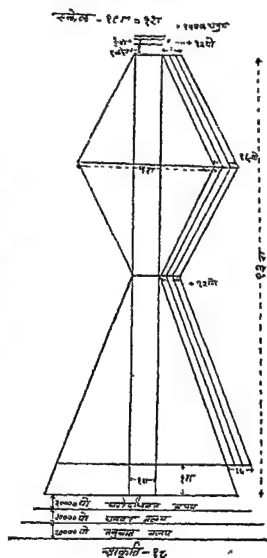
अर्थात् $\frac{1}{2}$ राज हानि-वृद्धि प्रमाण हो सकता है। शेष स्पष्ट नहीं है।

अगली गाथाओं (२३४-२६६) में जर्ज और अधोलोक क्षेत्रों को इन्हीं आठ प्रकार की आकृतियों (figures) में बदल कर प्ररूपण किया गया है। उपर्युक्त विवरण, यूनानियों की क्षेत्र प्रयोग विधि (method of application of areas) के विवरण के सदृश है।

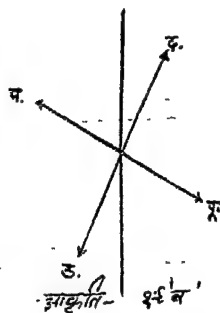
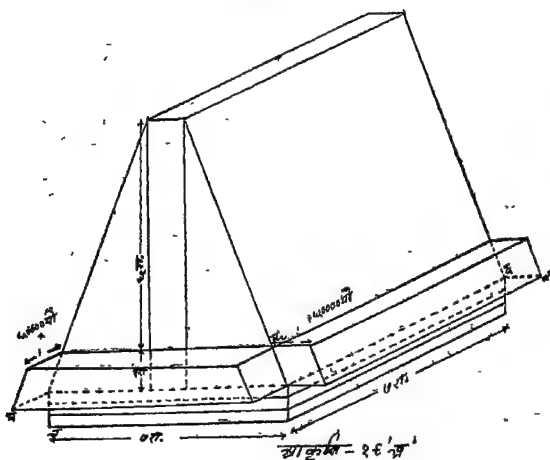
इन गाथाओं में भिन्न भिन्न घनफल लेकर, सामान्य लोक अथवा उसके भागों (जैसे, अधोलोक और ऊर्ध्व लोक) के घनफल के तुल्य उपर्युक्त आकृतियों को प्राप्त करने के लिये वर्णन दिया गया है ।
प्रक्रियाएँ और आकृतियाँ वही होंगी । (गा. १-२५८)

इन चित्रों में निदर्शित लम्बाइयों के प्रमाण मान रूप नहीं लिये गये हैं। (आकृति-१८ देखिये)

गा. २७० में वातबल्यों से वेष्टित लोक १८ और १९ वीं आकृतियों से स्पष्ट हो जावेगा। ग्रंथकार ने जिन स्थानों का वर्णन किया है उन्हीं को आकृति-१९ और २० में ग्रहण किया गया है।



रुळेला - १८॥ = १२३५



(गा. १, २६८)

सर्व प्रथम, (आकृति १९ 'अ' और 'ब') लोक के नीचे वातबलयों द्वारा वेष्टित क्षेत्रों का घनफल निकालते हैं ।

च द एक आयतक (cuboid) है लम्बाई ७ राजु, चौड़ाई ७ राजु और उल्लेख या गहराई ६०००० योजन है, \therefore उसका घनफल = ७ राजु \times ७ राजु \times ६०००० यो.

$$= ४९ वर्ग राजु \times ६०००० यो. होता है ।$$

इसे ग्रन्थकार ने मूलगाथा में प्रतीक द्वारा स्थापित किया है, यथा :

$$= ६००००.....(१)$$

अत्र पूर्व पश्चिम में स्थित क्षेत्रों को लेते हैं । वे हैं, फ व पूर्व की ओर और फ व सदृश क्षेत्र पश्चिम की ओर । फ व एक समान्तराणीक (parallelepiped) है, जिसका घनफल लम्बाई \times चौड़ाई \times उल्लेख होता है ।

इस क्षेत्र में उल्लेख १ राजु है, आयाम ७ राजु और बाह्य या मुटाई ६०००० योजन है \therefore दोनों पाद्वं भागों में स्थित वातक्षेत्रों का घनफल

$$= २ \times [७ राजु \times १ राजु \times ६०००० योजन] = ७ वर्ग राजु \times १२०००० योजन$$

$$= ४९ वर्ग राजु \times \frac{१२००००}{७} योजन होता है ।$$

$$\text{इसे मूल में, } = \frac{१२००००}{७} \text{ लिखा गया है । } \dots\dots\dots(२)$$

(१) और (२) परिणामों को जोड़ने पर ४९ वर्ग राजु \times (६०००० योजन $+$ $\frac{१२००००}{७}$ योजन) अर्थात् (४९ वर्ग राजु) \times ($\frac{५४००००}{७}$ योजन) घनफल प्राप्त होता है जिसे ग्रन्थकार ने $= ५४००००$ लिखा है । $\dots\dots\dots I$ ७

अत्र उत्तर दक्षिण की अपेक्षा (अर्थात् सामनेवाला वातबलय वेष्टित लोकात् भाग) पफ तथा पफ के सदृश पीछे स्थित लम्ब सक्षेत्र समच्छिन्नक (frustrum of a right prism) हैं । यहा उल्लेख १ राजु (vertical height 1 raju), तल भाग में आयाम ७ राजु, मुख दक्षे राजु और बाह्य ६०००० योजन है ।

$$\therefore \text{ इसका घनफल } = २ \times \frac{१}{२} \times १ राजु \times (\frac{४९}{२} + \frac{४९}{२} राजु) \times ६०००० योजन$$

$$= \frac{४९}{२} वर्ग राजु \times ६०००० योजन$$

१ वातबलयों से वेष्टित वरिमाओं के घनफल निकालने की रीति क्या ग्रीस से प्राप्त हुई, यह नहीं कहा जा सकता । पर, ग्रन्थकार द्वारा उपयोग में लाये गये नियमों की तुलना श्री सेन्फोर्ड द्वारा प्रतिपादित विषय "The Study of Indivisibles" से करने योग्य है । "Cavalieri (1598—1647) made extensive use of the idea of indivisibles, that is, of considering a surface the smallest element of a solid, a line the smallest element of a surface, and a point that of a line. This concept was the foundation of Cavalieri's famous theorem which reads as follows : If between the same parallels, any two plane figures are constructed, and if in them, any straight lines being drawn equidistant from the parallels, the enclosed portions of any one of these lines are equal, the plane figures are also equal to one another, and if between the same parallel planes any solid figures are constructed, and if in them, any planes being drawn equidistant from the parallel planes, the included plane figures out of any one of the planes so drawn are equal, the solid figures are likewise equal to one another."—"A Short History of Mathematics", By Sanford, p. 315.

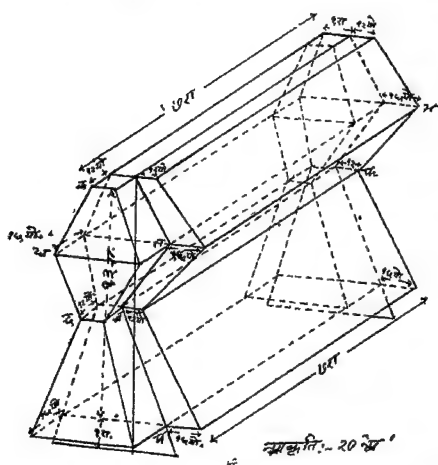
$$= ४९ वर्ग राशु \times \frac{५५२००००}{३४३} \text{ योजन होता है।}$$

$$\text{इसे ग्रंथकार ने } = \frac{५५२००००}{३४३} \text{ लिखा है।} \dots\dots\dots (३)$$

$$\text{I में (३) जोड़नेपर } ४९ \text{ वर्ग राशु} \times \left(\frac{४९ \times ५४००००}{३४३} + \frac{५५२००००}{३४३} \text{ योजन} \right)$$

$$\text{अर्थात् } ४९ \text{ वर्ग राशु} \times \frac{३१९८००००}{३४३} \text{ योजन प्राप्त होता है।}$$

$$\text{इसे ग्रंथकार ने } = \frac{३१९८००००}{३४३} \text{ लिखा है।} \dots\dots\dots \text{II}$$



य

लोक के अन्त से १ राशु ऊपर तक ६०००० योजन बाह्य-वाले वातवलय क्षेत्रों की गणना के पश्चात् उनसे ऊपर स्थित क्षेत्रों की गणना करते हैं। यहाँ (आकृति २० 'अ') वातवलयों का बाह्य पूर्व पश्चिम तथा उत्तर दक्षिण में क्रमशः १६ योजन, १२ योजन, १६ योजन और लोकशिखर पर १२ योजन चित्र में बतलाये अनुसार हैं।

पूर्व में आकृतियाँ प फ, ब म और त थ हैं; तथा ऐसी ही पश्चिम में आकृतियाँ हैं जो संक्षेत्रों के समन्वितक (frustrum of triangular prisms) हैं। इनका कुल उत्सेध १३ योजन है, हानि वृद्धि क्रमशः १६, १२, १६, १२ योजन हैं, तथा आयाम ७ योजन है। इसलिये इन आकृतियों का कुल घनफल $= २ \times ७ \text{ राशु} \times १३ \text{ राशु} \times \left(\frac{१६ + १२}{२} \text{ योजन} \right)$

$$= २ \times ७ \text{ राशु} \times १३ \text{ राशु} \left(१४ \times \frac{३४३}{३४३} \text{ योजन} \right) = ४९ \text{ वर्ग राशु} \times \frac{२७८३६}{३४३} \text{ योजन होता है।}$$

इस प्रकार की गणना, राशु और योजन में सम्बन्ध अव्यक्त होने से त्रिकुल ढीक तथा प्रशंसनीय है।

$$\text{इसे ग्रंथकार ने } = \frac{१७८३६}{३४३} \text{ लिखा है।} \dots\dots\dots (४)$$

अब, उत्तर दक्षिण अर्थात् सामने के भागों में स्थित प द, ब घ, और त क तथा ऐसे ही पीछे के क्षेत्रों का घनफल निकालते हैं। ये भी त्रिभुजीय संक्षेत्रों के समन्वितक हैं।

प ढ के घनफल के लिये उत्सेध ६ राजु, मुख १ राजु, भूमि ६३ राजु तथा बाहल्य क्रमशः १६, १२ योजन है, इसलिये इसका तथा ऐसी ही पीछे की आकृति का कुल घनफल

$$= २ \times (६ \text{ राजु}) \times \left(\frac{६३+१}{२} \text{ राजु} \right) \times \left(\frac{१६+१२}{२} \text{ योजन} \right)$$

$$= ३७० \text{ वर्ग राजु} \times १४ \text{ योजन} = ४९ \text{ वर्ग राजु} \times \frac{४२००}{१०००} \text{ योजन होता है।}$$

इसे ग्रन्थकार ने = $\frac{४२००}{२४३}$ लिखा है।.....(५)

इसी प्रकार, व घ तथा त क और उनके समान दक्षिण में स्थित क्षेत्रों के घनफल के लिये कुल उत्सेध ७ राजु है; हानि-वृद्धि १, ५, १ राजु है तथा बाहल्य में भी हानि-वृद्धि १२, १६, १२ है। ऐसे

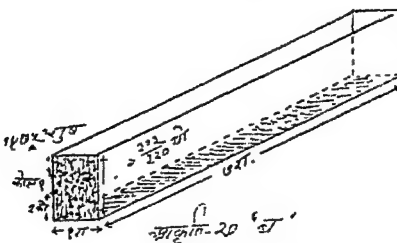
सक्षेत्र समष्टिकों का कुल घनफल = $२ \times ७ \text{ राजु} \times \left(\frac{५+१}{२} \text{ राजु} \right) \times \left(\frac{१६+१२}{२} \text{ योजन} \right)$

$$= ४२ \text{ वर्ग राजु} \times १४ \text{ योजन}$$

$$= ४९ \text{ वर्ग राजु} \times \frac{४२००}{१०००} \text{ योजन होता है।}$$

इसे ग्रन्थकार ने = $\frac{५८८}{४९}$ लिखा है।.....(६)

अब लोक के ऊपर के घनफल को निकालते हैं (आकृति २० 'व')।



यहां उत्सेध २ कोस + १ कोस + १५७५ घनुष = $\frac{७५७५}{८०००} \text{ योजन} = \frac{३०३}{३२०}$

योजन है।

आयाम १ राजु, चौड़ाई ७ राजु है

∴ इस आयतन (Cuboid) का घनफल

$$= १ \text{ राजु} \times ७ \text{ राजु} \times \frac{३०३}{३२०} \text{ योजन}$$

$$= ४९ \text{ वर्ग राजु} \times \frac{३०३}{२२४०} \text{ योजन होता है।}$$

इसे ग्रन्थकार ने = $\frac{३०३}{२२४०}$ लिखा है।.....(७)

शेष भागों के विषय में ग्रन्थकार ने नहीं लिखा है। शायद वह घनफल इनकी तुलना में अपेक्षणीय गिना गया हो अथवा उनकी गणना हो न की गई हो। यह बात स्पष्ट नहीं है। जहां तक उस अपेक्षित घनफल का सम्बन्ध है, वह भी सरलता से निकाला जा सकता है।

अपर्युक्त ७ क्षेत्रों का कुल घनफल

$$= ४९ \text{ वर्ग राजु} \times \frac{१०२४१९८३४८७}{१०९७६०} \text{ योजन प्राप्त होता है।III}$$

इसे ग्रन्थकार ने = १०२४१९८३४८७

१०९७६० लिखा है १.....(८)

इसके पदवात् आठों पृथ्वियों के अधस्तन भाग में वायु से अवरुद्ध क्षेत्रों के घनफल निकाले गये हैं जिनकी गणना मूल में स्पष्ट है। समस्त पृथ्वियों के अधस्तन भाग में अवरुद्ध क्षेत्रों का कुल घनफल

४९ वर्ग राजु $\times \left(\frac{१०९२००००}{४९} \text{ योजन} \right)$ होता है जिसे ग्रन्थकार ने = $\frac{१०९२००००}{४९}$ स्थापित किया है १..IV

आठ पृथ्वियों का भी कुल घनफल मूल में बिलकुल स्पष्ट है जो

४९ वर्ग राजु $\times \left(\frac{४३६६४०५६}{४९} \text{ योजन} \right)$ है, जिसे.....V

ग्रन्थकार ने = $\frac{४३६६४०५६}{४९}$ लिखा है।

जब III, IV, और V के योग को सम्पूर्ण लोक (三) में से घटाते हैं तो अवशिष्ट शुद्ध आकाश का प्रमाण होता है। उसकी स्थापना जो मूल में की गई वह स्पष्ट नहीं है। आकृति-२१ देखिये।



आकृति - २१

यहां एक उल्लेखनीय बात यह है कि सिकन्दरिया के हेरन ने (प्रायः ईसा की तीसरी सदी में) वेत्रासन सदृश चांद्र (wedge shaped solid, $\beta\omega\mu\iota\sigma\chi\omicron\sigma$, 'little altar') के घनफल को लगभग उपर्युक्त विधियों द्वारा प्राप्त किया है। यदि नीचे का आधार 'a' और 'b' भुजाओंवाला आयत है तथा ऊपर का मुख 'c' और

'd' भुजाओंवाला आयत है तो उत्प्रेष 'h' लेने पर घनफल निकालने का सूत्र यह है—

$$\left\{ \frac{1}{2} (a+c)(b+d) + \frac{1}{2} (a-c)(b-d) \right\} h$$

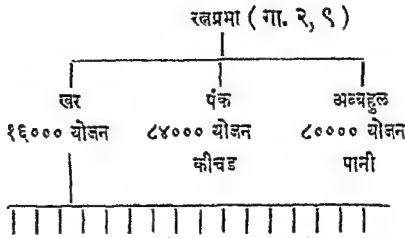
यह घनफल, वेत्रासन को समान्तरासीक (parallelepiped) और त्रिभुज संक्षेत्र (triangular prism) में विदीर्ण कर, प्राप्त किया गया है^१।

पुनः बेबीलोनिया में, प्रायः ३००० वर्ष पूर्व, पृथ्वी माप के ($\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$) विषय में उपर्युक्त विवरण से सम्बन्ध रखनेवाला चतुर्भुज क्षेत्र सम्बन्धी अभिमत कूलिज के शब्दों में यह है।

"When four measures are given the area stated is in every case greater than possible no matter what the shape. de la Fuye explains this by the ingenious hypothesis that the Babylonians used for area in terms of sides the incorrect formula $F = \frac{1}{2} (a+a')(b+b')$. This gives the correct result only in the case of the rectangle. It is curious that we find the same incorrect formula in an Egyptian inscription that scarcely antedated the christian era."^२

^१ Heath, Greek Mathematics, vol (ii) p. 333, Edn, 1921.

^२ Coolidge, A History of Geometrical Methods, p. 5, Edn. 1940.



चित्रादि १६ भेद प्रत्येक १००० योजन मोटी एवं वेवासन आकार की ।

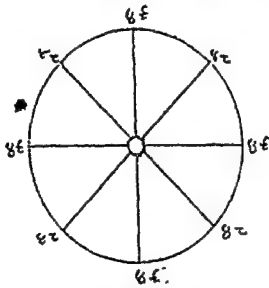
गा. २, २६-२७— कुल विल ८४ लाख है । वे इस प्रकार हैं—

र. प्र.	श. प्र.	वा. प्र.	पं. प्र.	धू. प्र.	त. प्र.	म. प्र.
३००००००	२५०००००	१५०००००	१००००००	३०००००	९९९९५	५

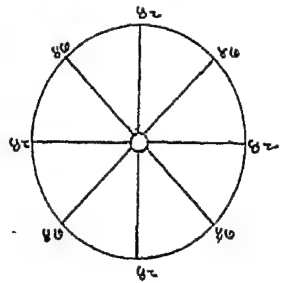
गा. २, २८— सातवीं पृथ्वी के ठीक मध्य में नारकी विल है । अवग्रहल पर्यंत शेष छः पृथ्वियों में नीचे व ऊपर एक एक हजार योजन छोड़कर पटलों (discs) में क्रम से नारकियों के विल हैं ।

गा. २, ३६— पटल के सब विलों के बीचवाला इन्द्रक विल और चार दिशाओं तथा विदिशाओं के पंक्तिबद्ध विल श्रेणिबद्ध कहलाते हैं । शेष श्रेणिबद्ध विलों के इधर उधर रहनेवाले विल प्रकीर्णक कहलाते हैं ।

गा. २, ३७— इन्द्रक विल, सात पृथ्वियों में क्रमशः १३, ११, ९, ७, ५, ३, १ हैं । प्रथम इन्द्रक विल और द्वितीय इन्द्रक विल के लिये आकृति-२२ 'अ', और 'ब' देखिये ।



आकृति २२ 'अ'



आकृति २२ 'ब'

गा. २, ३९— कुल इन्द्रक विल ४९ हैं ।

गा. २, ५५— दिशा और विदिशा के कुल प्रकीर्णक विल $(४८ \times ४) + (४९ \times ४) = ३८८$ हैं । इनमें सीमन्त इन्द्रक विल को मिलाने पर प्रथम पायड़े के कुल विल ३८९ होते हैं ।

गा. २, ५८— रूपरैखिक वर्णन देने के पश्चात्, ग्रंथकार श्रेणीव्यवहार गणित का उपयोग कर समान्तर श्रेढि (Arithmetical Progression) के विषय में, इस प्रकरण से सम्बन्धित अज्ञात की गणना के लिये सूत्र आदि का वर्णन करते हैं ।

ति. ग. ६

यदि प्रथम पाथड़े में बिलों की कुल संख्या a हो और फिर प्रत्येक पाथड़े में क्रमशः d द्वारा उत्तरोत्तर हानि हो तो n वें पाथड़े में कुल बिलों की संख्या प्राप्त करने के लिये $\{a - (n-1)d\}$ सूत्र का उपयोग किया है। यहाँ $a = ३८९$ है, $d = ८$ है और $n = ४$ है \therefore चौथे पाथड़े में इन्द्रक सहित श्रेणिबद्धबिलों की संख्या $\{३८९ - (४-१)८\} = ३६५$ है।

गा. २, ५९— n वें पाथड़े में इन्द्रक सहित श्रेणिबद्ध बिलों की संख्या निकालने के लिये ग्रंथकार साधारण सूत्र देते हैं : $\left(\frac{a-1}{d} + 1 - n\right)d + 1$ -----

यहां $a = ३८९$ है; इष्ट प्रतर अर्थात् इष्ट पाथड़ा n वां है।

गा. २, ६०— यदि प्रथम पाथड़े में इन्द्रक सहित श्रेणिबद्ध बिलों की संख्या a और n वें पाथड़े में a_n मान ली जाय तो n का मान निकालने के लिये इस साधारण सूत्र (general formula) का उपयोग किया है : $\left[\frac{a-1}{d} - \frac{a_n-1}{d}\right] = n$

गा. २, ६१— यहां 'd' प्रचय (common difference) है।

किसी श्रेढि में प्रथम स्थान में जो प्रमाण रहता है उसे आदि, मुख (वदन) अथवा प्रमव (first term) कहते हैं। अनेक स्थानों में समान रूप से होनेवाली वृद्धि अथवा हानि के प्रमाण को चय या उत्तर (common difference) कहते हैं और ऐसी वृद्धि हानिवाले स्थानों को गच्छ या पद (term) कहते हैं।

गा. २, ६२— यदि श्रेढियों को वृद्धिमय मानें तो रत्नप्रभा में प्रथम पद २९३ आदि (first term) है, गच्छ (number of terms) १३ है और चय (common difference) ८ है। इसी प्रकार अन्य पृथ्वियों का उल्लेख अलग अलग है, चय सबमें एकसा है।

ऐसी श्रेढियों का कुल संकलित घन अर्थात् इन्द्रक सहित श्रेणिबद्ध बिलों की कुल संख्या निकालने के लिये सूत्र दिया गया है।

गा. २, ६४— यहां कुल घन को हम S , प्रथम पदको a , चय को d और गच्छ को n द्वारा निरूपित करते हैं तो सूत्र निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है^१।

$$S = [(n-1)d + (1-1)d + (a, 2)] \frac{n}{2}$$

यहां इच्छा १ है अर्थात् पहिली श्रेढि के बिलों की कुल संख्या प्राप्त की है। इसे हल करने पर हमें साधारण सूत्र (general formula) प्राप्त होता है : $S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$

इसी प्रकार दूसरी श्रेढि के लिये जहाँ इच्छा २ है

$$S = [(n-2)d + (2-1)d + (a, 2)] \frac{n}{2}$$

अर्थात् वही साधारण सूत्र फिर से प्राप्त होता है :

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

^१ मूल गद्यांश को देखने से शत होता है कि (१३-१) लिखने के लिये ग्रंथकार ने १३ लिखा है। इसी प्रकार (१-१) लिखने के लिये १ लिखा है।

संकलित घन निकालने के लिये ग्रंथकार दूसरे सूत्र का कथन करते हैं। उसे उपर्युक्त प्रतीकों से निरूपित करने पर, इस प्रकार लिखा जा सकता है :—

$$S = \left[\left\{ \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{n-1}{2} \right) \right\} d + 1 \right] n$$

यह समीकार ऊपर दी गई सब श्रेणियों के लिये साधारण है। उपर्युक्त संख्या “५” महातमःप्रभा के बिलों से सम्बन्धित होना चाहिये।

इन्द्रक बिलों की कुल संख्या ४९ है, इसलिये यदि अंतिम पद ५ को 1 माना जाय, a को ३८९, और d (प्रचय) ८ हो तो $1 = a - (49 - 1)d$

$$\begin{aligned} \text{अर्थात् } 5 &= 389 - 384 \\ &= 5 \end{aligned}$$

इस प्रकार जो यहाँ ५ लिया गया है, वह सब श्रेणियों के अंत में जो श्रेणि है, उसका अंतिम पद है।

गा. २, ६९— सम्पूर्ण पृथ्वियों के इन्द्रक सहित श्रेणिवद्ध बिलों के प्रमाण को निकालने के लिये आदि पाच (first term A) चय आठ (common difference D) और गच्छ का प्रमाण उर्नचास (number of terms N) है।

गा. २, ७०— यहाँ सात पृथ्वियाँ हैं जिनमें श्रेणियों की संख्या ७ है। अंतिम श्रेणि में एक ही पद ५ है। इन सब का संकलित घन प्राप्त करने के लिये ग्रंथकार ने यह सूत्र दिया है।

$$\begin{aligned} S' &= \frac{N}{2} [(N+7)D - (7+1)D + 2A] \\ &= \frac{N}{2} [2A + (N-1)D], \quad \text{यहाँ } 7 \text{ इष्ट है।} \end{aligned}$$

गा. २, ७१— ग्रंथकार ने दूसरा सूत्र इस प्रकार दिया है।

$$\begin{aligned} S' &= \left[\frac{N-1}{2} \times D + A \right] N \\ &= \frac{N}{2} [2A + (N-1)D] \end{aligned}$$

यहाँ $N = 49$, $A = 5$, $D = 8$ है।

गा. २, ७४— इन्द्रक सहित बिलों (श्रेणीवद्ध बिलों) की संख्या निकालने के लिये इन्द्रकों को अलग कर देने पर पृथ्वियों में श्रेणीवद्ध बिलों की श्रेणियों के आदि (first term in the respective prathvi beginning from the Ratnaprabha) क्रमशः २९२, २०४ इत्यादि हैं। गच्छ (number of terms) प्रत्येक के लिये क्रमशः १३, ११, ... इत्यादि हैं और चय ८ है।

यहाँ भी साधारण सूत्र दिया गया है, जो सब पृथ्वियों के अलग अलग घन को (श्रेणीवद्ध बिलों की संख्या) निकालने के लिये निम्न लिखित रूप में प्रतीकों द्वारा दर्शाया जा सकता है।

$$S'' = \frac{[n^2 \cdot d] + [2n \cdot a] - nd}{2} = \frac{n^2 d + 2na - nd}{2} = \frac{n}{2} [(n-1)d + 2a]$$

जहां n गच्छ, d प्रचय और a आदि हैं।

गा. २, ८१— इंद्रकों रहित बिलों (श्रेणिबद्ध बिलों) की समस्त पृथ्वियों में कुल संख्या निकालने के लिये ग्रंथकार सूत्र देते हैं। यहां आदि ५ नहीं होकर ४ है, क्योंकि महातमःप्रभा में केवल एक इन्द्रक और चार श्रेणिबद्ध बिल हैं। यही आदि अथवा A है; ४९, N है और प्रचय \mathcal{C} , D है। इसके लिये प्रतीक रूप से सूत्र यह है:—

$$\begin{aligned} S''' &= \frac{(N^2 - N)D + (N \cdot A)}{2} + \left(\frac{A}{2} \cdot N \right) \\ &= \frac{N}{2} [A + (N-1)D + A] \\ &= \frac{N}{2} [2A + (N-1)D] \end{aligned}$$

गा. २, ८२-८३— आदि [first term A] निकालने के लिये ग्रंथकार सूत्र देते हैं :—

$$A = \frac{\left[S''' \div \frac{N}{2} \right] + [D \cdot \mathcal{C}] - [\mathcal{C} - 1 + N] D}{2}$$

जिसका साधन करने पर पूर्ववत् साधारण सूत्र प्राप्त होता है।

यहां इच्छित पृथ्वी ७ थी है जिसका आदि निकालना इष्ट था।

इच्छा कोई भी राशि हो सकती है।

गा. २, ८४— चय [common difference D] निकालने के लिये ग्रंथकार सूत्र देते हैं,

$$D = S''' \div \left([N-1] \frac{D}{2} \right) - \left(A \div \frac{N-1}{2} \right)$$

इसे साधित करने पर पूर्ववत् साधारण सूत्र प्राप्त होता है।

गा. २, ८५— इसके पश्चात् ग्रंथकार रत्नप्रभा प्रथम पृथ्वी के संकलित धन (श्रेणिबद्ध बिलों की कुल संख्या) को लेकर पद १३ को निकालने के लिये निम्न लिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं; जहां $n = १३$, $S'' = ४४२०$, $d = ८$ और $a = २९२$ आदि है।

$$n = \left\{ \sqrt{\left(S'' \cdot \frac{d}{2} \right) + \left(a - \frac{d}{2} \right)^2} - \left(a - \frac{d}{2} \right) \right\} \div \frac{d}{2}$$

इसे साधित करने पर पूर्ववत् समीकार प्राप्त होता है।

गा. २, ८६— उपर्युक्त के लिये दूसरा सूत्र भी निम्न लिखित रूप में दिया गया है।

$$n = \left\{ \sqrt{\left(2 \cdot d \cdot S'' \right) + \left(a - \frac{d}{2} \right)^2} - \left(a - \frac{d}{2} \right) \right\} \div d$$

इसे साधित करने पर पूर्ववत् समीकार प्राप्त होता है।

गा. २, १८५— इन्द्रको का विस्तार समान्तर श्रेढि (Arithmetical progression) में बढ़ता है। प्रथम इन्द्रक का विस्तार ४५०,०००० योजन और अंतिम इन्द्रक का १०,०००० योजन है। कुल इन्द्रक विल ४९ हैं। यह गच्छ की सख्या है जिसे प्रतीक रूप से हम n द्वारा निरूपित करेंगे। आदि ४५००००० (a) और अंतिम पद १००००० (l) तथा चव (Common difference) d है तो d निकालने के लिये सूत्र ग्रंथकार ने यह दिया है :

$$d = \frac{n-1}{(n-1)} \text{ यहाँ } n \text{ अंतिम पद के लिये उपयोग में आया है।}$$

प्रथम विल से यदि n वें विल का विस्तार प्राप्त करना हो तो उसे प्राप्त करने के लिये निम्न लिखित सूत्र का उपयोग किया गया है :

$$a_n = a - (n-1)d.$$

यदि अंतिम विल से n वें विल का विस्तार प्राप्त करना हो तो सूत्रको प्रतीक रूप से निम्न प्रकार निबद्ध किया जा सकता है :—

$$b_n = b + (n-1)d.$$

जहाँ a_n और b_n उन n वें विलों के विस्तारों के प्रतीक हैं।

यहाँ विस्तार का अर्थ व्यास (diameter) किया जा सकता है।

गा. २, १५७— इन विलों की गहराई (बाहल्य) समान्तर श्रेढि में है। कुल पृथ्वियां ७ हैं। यदि n वीं पृथ्वी के इन्द्रक का बाहल्य निकालना हो तो नियम यह है :—

$$n \text{ वीं पृथ्वी के इन्द्रक का बाहल्य} = \frac{(n+1) \times ३}{(७-१)}$$

$$\text{इसी प्रकार, } n \text{ वीं पृथ्वी के श्रेणिबद्ध विलों का बाहल्य} = \frac{(n+१) \times ४}{(७-१)}$$

$$\text{इसी प्रकार, } n \text{ वीं पृथ्वी के प्रकीर्णक विलों का बाहल्य} = \frac{(n+१) \times ७}{(७-१)}$$

गा. २, १५८— दूसरी रीति से विलों का बाहल्य निकालने के लिये ग्रंथकार ने उनके 'आदि' के प्रमाण क्रमशः ६, ८ और १४ लिये हैं।

पृथ्वियों की सख्या ७ है। यदि n वीं पृथ्वी के इन्द्रक का बाहल्य निकालना हो तो सूत्र यह है :—

$$n \text{ वीं पृथ्वी के इन्द्रक का बाहल्य} = \frac{(६ + n \cdot ३)}{(७-१)}$$

$$\text{यहाँ ६ को आदि लिखें तो दक्षिणपक्ष} = \left(\frac{६ + n \cdot ३}{७-१} \right) \text{ होता है।}$$

$$\text{इसी प्रकार, } n \text{ वीं पृथ्वी के श्रेणिबद्ध विलों का बाहल्य} = \frac{(८ + n \cdot ६)}{(७-१)} \text{ होता है।}$$

$$\text{यदि ८ को आदि लिखें तो दक्षिण पक्ष} = \frac{८ + n \cdot ६}{(७-१)} \text{ होता है।}$$

प्रकीर्णक विलों के लिये भी यही नियम है।

आगे गाथा १५९ से १९४ तक इन विलों के अन्तराल (inter space) का विवरण दिया गया है जो सूर्य की दृष्टि से अधिक महत्व का प्रतीत नहीं हुआ है।

गा. २, १९५— धर्मा या रत्नप्रभा के नारकियों की संख्या निकालने के लिये पुनः जगश्रेणी और घनांगुल का उपयोग हुआ है। प्रतीक रूप से, घनांगुल के लिये ६ लिखा गया है और उसका घनमूल सूर्यगुल २ लिखा गया है^१।

आज कल के प्रतीकों में धर्मा पृथ्वी के नारकियों की संख्या

$$\begin{aligned} &= \text{जगश्रेणी} \times (\text{कुछ कम}) \sqrt{\sqrt{6}} \\ &= \text{जगश्रेणी} \times [\text{कुछ कम } (6)^{\frac{1}{2}}] \\ &= \text{जगश्रेणी} \times [\text{कुछ कम } (2)^{\frac{3}{2}}] \\ &= \text{जगश्रेणी} \times [\text{कुछ कम } \sqrt[3]{(2)^3}] \end{aligned}$$

मूल गाथा में इसका प्रतीक $\frac{12}{12}$ दिया गया है। आड़ी रेखा जगश्रेणी है।

१२ का अर्थ स्पष्ट नहीं है। वास्तव में उन्हीं प्राचीन प्रतीकों में $\frac{6}{2}$ लिखा जाना था (१)।

गा. २, १९६— इसी प्रकार, वंशा पृथ्वी के नारकी जीवों की संख्या आजकल के प्रतीकों में

$$\begin{aligned} &= \text{जगश्रेणी} \div (\text{जगश्रेणी})^{\left(\frac{1}{2^{12}}\right)} \\ &= \text{जगश्रेणी} \div (\text{जगश्रेणी})^{\frac{1}{4096}} \end{aligned}$$

इसे ग्रंथकार ने प्रतीक^२ रूप में $\frac{12}{12}$ लिखा है। स्पष्ट है कि इसमें प्रथम पद जगश्रेणी नहीं है

जिसमें कि $(\text{जगश्रेणी})^{\frac{1}{2^{12}}}$ का भाग देना है। यह प्रतीक केवल जगश्रेणी के बारहवें मूल को निरूपित करता है।

१ यहाँ जगश्रेणी का अर्थ जगश्रेणी प्रमाण सरल रेखा में स्थित प्रदेशों की संख्या से है। जगश्रेणी असंख्यात संख्या के प्रदेशों की राशि है। असंख्यात संख्यावाले प्रदेश पंक्तिबद्ध संलग्न रखने पर जगश्रेणी का प्रमाण प्राप्त होता है। प्रदेश, आकाश का वह अंश है जो मूर्त पुद्गल द्रव्य के अविभाज्य परमाणु द्वारा अवगाहित किया जाता है। इसी प्रकार सूर्यगुल (२) उस संख्या का प्रतीक है जो सूर्यगुल में स्थित पंक्तिबद्ध संलग्न प्रदेशों की संख्या है। सूर्यगुल भी जगश्रेणी के समान, एक दिश, परिमित रेखा-माप है।

२ करणी का चिह्न तथा उसके उपयोग के विषय में गणित के इतिहासकारों का मत है कि इटली और उत्तर यूरोप के गणितज्ञों ने पंद्रहवीं सदी के अन्त से उसे विकसित करना आरम्भ किया था। विरा सेन्फोर्ड ने अपना मत इस प्रकार व्यक्त किया है,

"Radical signs seem to have been derived from either the Capital letter R or from its lower case form, the former being preferred by Italian writers and the latter by those of northern Europe. Before the addition of the horizontal bar which showed the terms affected by the radical sign, various symbols of aggregation were developed"—"A Short History of Mathematics" p. 158.

गा. २, २८५— सौरक इन्द्रक में उत्कृष्ट आयु असंख्यात पूर्वकोटि दर्शाने के लिये ग्रंथकार ने प्रतीक निरूपण इस तरह की है : पृष्ठ १ ध ।

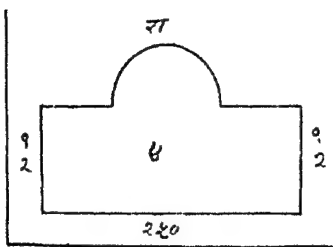
गा. २, २८६— प्रथम पृथ्वी के शेष ९ पटलों में उत्कृष्ट आयु समान्तर श्रेढि में है, जिसका चय (हानि वृद्धि प्रमाण) = $\frac{1-9^9}{1} = \frac{1}{10}$ है ।

चतुर्थ पटल में आदि द्वाँ है, पंचम पटल में द्वाँ, षष्ठम पटल में द्वाँ सागरोपम, इत्यादि ।

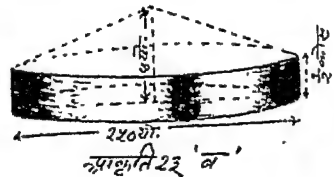
शेष वर्णन मूल में स्पष्ट है । वहाँ विनियता यह है कि आयु की वृद्धि विवक्षित (arbitrary) पटलों में समान्तर श्रेढि में है ।

इसी प्रकार गाथा २१८, २२० में दिया गया वर्णन स्पष्ट है ।

गा. ३, ३२— चैत्यवृक्षों के रमल का विस्तार २५० योजन, तथा ऊँचाई मध्य में ४ योजन और अंत में अर्ध कोस प्रमाण है । उसे ग्रंथकार ने आकृति—२३ अ के रूप में प्रस्तुत किया है ।

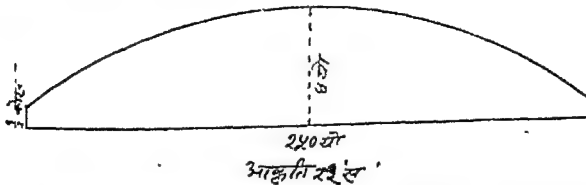


आकृति—२३ अ



रा का अर्थ स्पष्ट नहीं है ।

३ का अर्थ ३ कोस है । २५० विस्तार अर्थात् २५० व्यासवाला वृत्त त्रिविमा रूप लेने पर (Taken as a three dimensional figure) होता है । ४, मध्य में वत्सेध है । इस प्रकार यह चित्र (आकृति—२३ अ) नौचै एक रम्भ के रूप में है जिसकी ऊँचाई ३ कोस है । उसके ऊपर ४ योजन ऊँचाईवाला शंकु स्थित है । आकृति—२३ (अ) से वर्णित वृक्ष का स्वाभाविक रूप स्पष्ट हो जाता है ।



इन्द्र के परिवार देवों में से ७ अनीक (सेनातुल्य देव) भी होते हैं ।

सात अनीकों में से प्रत्येक अनीक सात सात-कक्षाओं से युक्त होती है उनमें से प्रथम कक्षा का प्रमाण अपने अपने सामानिक देवों के बराबर है । इसके पश्चात् अंतिम कक्षा तक उत्तरोत्तर, प्रथम कक्षा से दूना दूना प्रमाण होता गया है ।

असुरकुमार की सात अनीकें होती हैं। नागकुमार की प्रथम अनीक में ९ भेद होते हैं, शेष द्वितीयादि अनीकें असुरकुमार की अनीकों के समान होती हैं।

यदि चमरेन्द्र की महिषानीक (मैसों की सेना) की गणना की जाय तो कुल घन एक गुणोत्तर श्रेढि (geometrical progression) का योग होगा।

यहां गच्छ (number of terms) का प्रमाण ७ है,

मुख (first term) का प्रमाण ४००० है,

और गुणकार (common ratio) का प्रमाण २ है।

संकलित घन को प्राप्त करने के लिये सूत्र का उपयोग किया गया है^१। यदि S_n को n पदों का योग माना जाय जब कि प्रथमपद a और गुणकार (Common Ratio) r होवें तब,

$$\{ (r \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r \dots \text{upto } n \text{ terms}) - 1 \} \div (r - 1) \times a = S_n$$

$$\text{अथवा, } S_n = \frac{(r^n - 1)a}{(r - 1)}$$

इस प्रकार ७ अनीकों के लिये संकलित घन ७ (S_n) आ जाता है।

वैरोचन आदि के अनीकों का संकलित घन इसी सूत्र द्वारा प्राप्त कर सकते हैं।

गा. ३, १११— चमरेन्द्र और वैरोचन इन दो इन्द्रों के नियम से १००० वर्षों के बीतने पर आहार होता है।

गा. ३, ११४— इनके पन्द्रह दिनों में उच्छ्वास होता है।

गा. ३, १४४— इनकी आयु का प्रमाण १ सागरोपम होता है^२।

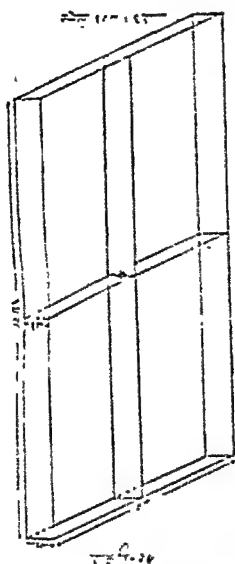
इसी प्रकार भूतानन्द इन्द्र का १२३ दिनों में आहार, १२३ सूर्त में उच्छ्वास होता है। भूतानन्द की आयु ३ पत्योपम, वेणु एवं वेणुधारी की २३ पत्योपम, पूर्ण एवं वशिष्ठ की आयु का प्रमाण २ पत्योपम है। शेष १२ इन्द्रों में से प्रत्येक की आयु १३ पत्योपम है।

^१ गुणोत्तर श्रेढि के संकलन के लिये जम्बूद्वीपप्रशस्ति में भी नियम दिये गये हैं। २।९; ४।२०४, २०५, २२२ आदि।

^२ इसके सम्बन्ध में Cosmolgy Old & New में दिये गये Prologue का footnote यहाँ पर उद्धृत करना आवश्यक प्रतीत होता है।

"Judge, J. L. Jaini, in the "Jaina Hostel Magazine" Vol. VII, Number 3, page 10, has observed that there is a fixed proportion between the respiration, feeling of hunger and the age of the celestial beings. The food interval is 1,000 years and the respiration one fortnight for every Sagar of age. The proportion of food interval to respiration is thus, 1 to 24000. He has further observed that if a man lived like a god, we should have a legitimate feeling of hunger only once in the day. A Normal person has 18 respirations to the minute, or $18 \times 60 \times 24 = 25920$ in 24 hours, roughly 24,000".—G. R. JAIN, "Cosmology Old and New", P. XIII, Edn. 1942.

गा. ४, ६— घसनाली के बहुमध्य भाग में चित्रा पृथ्वी के ऊपर ४५००००० योजन विस्तार



(diameter) वाला अतिगोल मनुष्यलोक है (आकृति-२४) । अतिगोल का अर्ध वेलनाकार हो सकता है, क्योंकि अगली गाथा में उसका बाह्य १ लाख योजन दिया है। (A right circular cylinder of which base is of rad. 2250000 and height is 100000 yojans) ।

गा. ४, ९— व्यास से परिधि निकालने के लिये π का मान $\sqrt{१०}$ लिया गया है और सूत्र दिया है: परिधि = $\sqrt{(\text{व्यास})^2 \times १०}$ अथवा $\text{circum.} = \sqrt{(\text{diam.})^2 \cdot 10}$ यहां व्यास को d , त्रिज्या को r और परिधि को c माना जाय तो

$$c = \sqrt{१०} \cdot d = २ r \sqrt{१०}$$

हृत्त का क्षेत्रफल निकालने के लिये सूत्र दिया गया है:—

$$\text{परिधि} \times \frac{\text{व्यास}}{४} \text{ अर्थात् क्षेत्रफल} = \frac{\text{परिधि} (\text{व्यास})^2}{\text{व्यास} \cdot ४} = \sqrt{१०} \cdot (\text{त्रिज्या})^2 \text{ अथवा, area} = \pi \cdot (\text{radius})^2.$$

इसी प्रकार, लम्ब वर्तुल रम्भ का घनफल निकालने का सूत्र यह है:—

आधार का क्षेत्रफल \times (उत्सेध या बाह्य)

घनफल (volume) को मूल में 'विदफल' लिखा गया है ।

परिधि जैसी बड़ी संख्या १४२३०२४९ को अंकों में लिखने के साथ ही साथ शब्दों में इस तरह लिखा गया है : परिधि क्रमशः नौ, चार, दो, दस, तीन, दो, चार और एक, इन अंकों के प्रमाण हैं— यह दशाई पद्धति का उपयोग है ।

गा. ४, ५५-५६— सम्भवतः, वहाँ जयकार का आशय निम्न लिखित है:—

जम्बूद्वीप का विस्त्रम्भ १००००० योजन है । उसकी परिधि निकालने के लिये π का मान $\sqrt{१०}$ लिया गया है । १० का वर्गमूल दशमलव के ५ अंक तक निकालने के पश्चात् छठवें अंक से ३ कोश की प्राप्ति सम्भव नहीं है, क्योंकि छठवा अंक ७ होने से योजन को कोश में परिवर्तित करने पर २८ की ही प्राप्ति होगी । और भी आगे गणना करने पर प्रतीत होता है कि १० के वर्गमूल को आगे के कई अंकों तक निकालने के पश्चात्, क्रमशः धनुष, किष्कू, हाथ, आदि में परिधि की गणना की गई है । ऐसा प्रतीत होता है कि ३ अवसन्नासन्न प्रमाण के पश्चात् $\frac{२३२१३}{१०५४०६}$ प्रमाण अवसन्नासन्न बच रहा है । अवसन्नासन्न नामक रक्ष में अनन्तानन्त परमाणुओं की कल्पना के आधार पर, ग्रंथकार ने उक्त भिन्निय प्रमाण में परमाणु की संख्या को, दृष्टिवाद अंग से $\frac{२३२१३}{१०५४०६}$ ख ख द्वारा निरूपित करना चाहा है । परन्तु, दूरी का प्रमाण निकालने के लिये अवसन्नासन्न के पश्चात् अथवा पहिले ही, प्रदेश द्वारा निरूपण होना आवश्यक है । सूर्यमूल में प्रदेशों की संख्या के प्रमाण के आधार पर १ अवसन्नासन्न द्वारा व्याप्त आकाश में अनन्तानन्त संख्या प्रमाण परमाणु भले ही एकावगाही होकर संरचक रूप स्थित हों, पर उतने ति, ग. ७

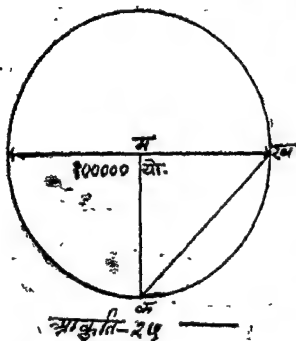
व्याप्त आकाश का प्रमाण अनन्तान्त प्रवेश कदापि नहीं हो सकता। इस प्रकार, इस सीमा तक किया गया यह प्ररूपण लाभप्रद न हो, पर उनके द्वारा खोजे गये पथ का प्रदर्शन करता है। इसके पूर्व अनन्तान्त आकाश का निरूपण ग्रंथकार ने ख ख ख द्वारा किया था। यहाँ परमाणुओं की अनन्तान्त संख्या बतलाने के लिये २३२१३ द्वारा निरूपण किया गया है और इसे “खखपदसंससस पुदं” का १०५४०९

गुणकार बतलाया है ताकि परिभाषानुसार अंतिम महत्ता प्रदर्शित की जा सके। यह कहा जा सकता है कि ख^१ अनंत का प्रतीक था और उसमें गुणनभाग की कल्पना उसी तरह सम्भव थी जैसी कि परिमित संख्याओं (finite quantities) में मानी जाती है।

गा. ४, ५९-६४— इसी प्रकार, क्षेत्रफल की अंत्य महत्ता को प्रदर्शित करने के लिये, $\frac{४८४५५}{१०५४०९}$ उवसन्नसन्न में परमाणुओं की संख्या ग्रंथकार ने ४८४५५ ख ख द्वारा निरूपित की है^२। ऐसा प्रतीत १०५४०९

होता है मानों पूर्व पश्चिम, उत्तर दक्षिण, ऊर्ध्व अधः, इन तीन दिशाओं में अंत न होनेवाली श्रेणियों द्वारा संरचित अनन्त आकाश की कल्पना से ख ख ख की स्थापना की गई हो।

गा. ४, ७०— यहाँ आकृति-२५ देखिये।



यदि विष्कम्भ (व्यास) को d मानें, परिधि को c मानें और भिज्या को r मानें तो (द्वीप की चतुर्थीय परिधि

$$\text{रूप घनुष की जीवा})^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times 2$$

$$\text{अथवा, (chord of a quadrant arc)}^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times 2 = 2r^2$$

पाथेगोरस के साध्यानुसार भी इसे प्राप्त किया जा सकता है क्योंकि (म क)^२ + (म क)^२ = (क ख)^२ होता है।

ग्रंथकार ने फिर इस चतुर्थीय परिधि तथा उसकी जीवा में सम्बन्ध बतलाया है। यथा:—

१ सम्भवतः ‘ख ख ख’ अनन्तान्त आकाश के प्रतीक के लिये ख शब्द से लिया गया है जहाँ ख का अर्थ आकाश होता है। ∞ या आधुनिक अनंत का प्रतीक मौर्वकालीन ब्राह्मी लिपि के अनुसार ख से लिया गया प्रतीक होता है।

२ वास्तव में आयाम सम्बन्धी एक दिश निरूपण के लिये ‘ख’ पद लेना आवश्यक है, तथा क्षेत्र सम्बन्धी द्विदिश निरूपण के लिये ‘ख ख’ पद लेना आवश्यक है। इसी प्रकार का प्ररूपण कोस, वर्ग कोस आदि में होना आवश्यक था, जिसे ग्रंथकार ने संक्षिप्त निरूपण के कारण न किया हो। उवसन्नसन्न के अंतिम परिणाम को लेकर, हम इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि उन्होंने १० का वर्ग-मूल दशमलव के किस अंक तक निकाला था, पर अति क्लिष्ट होने से, तथा १८ का सूक्ष्म निरूपण न होने से इस दिशा में अंब प्रयत्न करना लाभप्रद नहीं है। जम्बूद्वीपप्रशस्ति, ११२३, में आनुपूर्वी के अनुसार (११८; ११८), १८ का प्रमाण केवल हाथ प्रमाण तक दिया गया है, जो कुछ भिन्न है।

$$(\text{चतुर्थीय परिधि की जीवा})^2 \times \frac{1}{4} = (\text{चतुर्थीय परिधि})^2$$

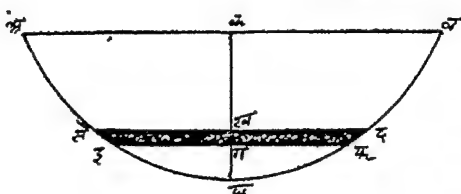
अथवा, यदि जीवा का ऊपर दिया गया मान लेकर साधन करें तो (चतुर्थीय परिधि)^२

$$= \left[2 \times \frac{d^2}{4} \right] \times \frac{4}{4} = \frac{4d^2}{4} = \frac{10r^2}{4}$$

$$\text{अथवा, चतुर्थीय परिधि} = \sqrt{10 \cdot \frac{r}{2}}$$

आन्कल, इस (Quadrant arc of a circle) को $\frac{\pi r}{2}$ लिखा जाता है जहां π का मान ३.१४१५९००० है।

(गा. ४, ९४-२६९)



अकृति-२७ अ

भरत क्षेत्र : (अकृति-२७ अ देखिये।) यहां विस्तार क ख = ५२६६६ योजन है।

चित्र में स द ह फ विजयाद पर्वत है।

ग घ = २३८६६ योजन है।

दक्षिण विजयाद की जीवा ह फ = ९७४८६६ योजन है, तथा विजयाद की जीवा स द = १०७२०६६ योजन

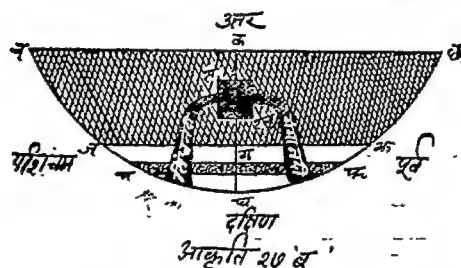
तथा घनप स ह घ फ द = १०७४३६६ योजन है। चूल्का = $\left(\frac{स द - ह फ}{२} \right) = ४८५३३ योजन है।$

क्षेत्र और पर्वत की पार्श्वभुजा = स द = ह फ = ४८८३३ योजन है।

भरत क्षेत्र के उत्तर भाग की जीवा का प्रमाण = अ ब = १४४७१६ योजन है तथा घनपुष्ट अ घ ब = १४५२८६६ योजन है।

चूल्का = $\frac{अ ब - स द}{२} = १८७५३३ योजन है।$ इत्यादि।

साथ ही पार्श्वभुजा अ स = ब द = १८९२३३ योजन है।



यहां चित्र मान प्रमाण पर नहीं बनाये जा सकते हैं क्योंकि १००००० योजन विस्तार की तुलना में ५२६६६ योजन के प्ररूपण से चित्र स्पष्ट न हो सकेगा। यहां (अकृति-२७ ब) अवधा ज घ ह भरत क्षेत्र है और उससे दुगुने विस्तार 'क ख' वाला ब छ झ ज हिमवान् पर्वत है।

स सरोवर ५०० योजन पूर्व पश्चिम में तथा १००० योजन उत्तर दक्षिण में विस्तृत है। गंगा, प्रथम, पूर्व की ओर ५०० योजन बहती है और तत्र दक्षिण की ओर मुड़कर सीधी ५२३६६६ योजन हिमवान्

पर्वत के अंत तक जाकर, विजयार्द भूमि प्रदेश में मुड़ती है। वहां वह पूर्व पश्चिम से आई हुई उन्मगा और निमगा से मिलती है। पुनः वह विजयार्द को पार कर दक्षिण भरत क्षेत्र में ११९५३ योजन तक जाकर, पूर्व की ओर मुड़कर, मागध तीर्थ के पास समुद्र में प्रवेश करती है। इसी प्रकार सप्ततीय गमन सिंधु नदी का है।

गा. ४, १८०— इस गाथा में ग्रंथकार ने उस दशा में जीवा निकालने के लिये नियम दिया है जब कि बाण और विष्कम्भ दिया गया हो।

बाण (height of the segment) को यहां h द्वारा, विस्तार (diameter) को d द्वारा प्ररूपित कर जीवा (chord) का मान निम्न लिखित सूत्र रूप में दिया जा सकता है।

$$\begin{aligned}\text{जीवा} &= \sqrt{d \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - \left(\frac{d}{2} - h \right)^2 \right]} \\ &= \sqrt{d \left[(r)^2 - (r - h)^2 \right]}\end{aligned}$$

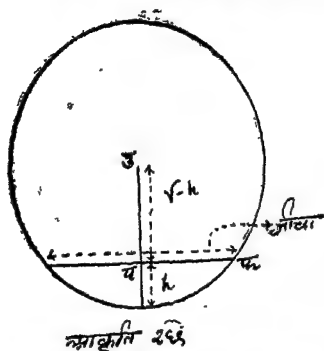
यहां भी पाथेगोरस के नाम से प्रसिद्ध साध्यका उपयोग है।

यहां आकृति-२६ से स्पष्ट है कि—

$$(\text{उफ})^2 = (\text{उप})^2 + (\text{पफ})^2$$

$$\therefore (\text{पफ})^2 = (\text{उफ})^2 - (\text{उप})^2$$

$$\therefore २ \text{ पफ} = \sqrt{d \left[(\text{उफ})^2 - (\text{उप})^2 \right]}$$



गा. ४, १८१— इस गाथा में ग्रंथकार ने उस दशा में धनुष का प्रमाण निकालने के लिये सूत्र दिया है जब कि बाण और विष्कम्भ का प्रमाण दिया गया हो।

धनुष (Length of the arc bounding the segment) का प्रमाण निम्न लिखित रूप में दिया जा सकता है :—

१ वृत्त की जीवा प्राप्त करने के लिये, बेबीलोनिया निवासी भी प्रायः इसी रूप के सूत्र का उपयोग करते थे जिसके विषय में कूलिज का अभिमत यह है,

"The Pythagorean theorem appears even more clearly in Neugebauer and Struve's translation of another of the cuneiform texts, which we may date somewhere around 2600 B. C."—Coolidge, A History of Geometrical Methods, p. 7, Edn. 1940.

सूत्र प्रतीकरूपेण यह है :—

$$\text{जीवा} = \sqrt{d^2 - (d - 2h)^2}$$

जम्बुद्वीपपणिसिद्धी में, जीवा = $\sqrt{४ \cdot \text{बाण} (\text{विष्कम्भ} - \text{बाण})}$ रूप में दिया गया है। २।२३; ६।९ आदि। इसी प्रकार धनुष = $\sqrt{६ (\text{बाण})^2 + (\text{जीवा})^2}$ प्ररूपित है। २।२४, २३; ६।२०.

$$\text{घनुष} = \sqrt{r^2[(d+h)^2 - (d)^2]}$$

यह देखने के लिये कि यह कहाँ तक शुद्ध है, हम अर्द्ध वृत्त का घनुष प्रमाण निकालने के लिये $h=r$ रखते हैं।

$$\begin{aligned}\text{इस दशा में घनुष} &= \sqrt{r^2[(d+r)^2 - (d)^2]} \\ &= \sqrt{r^2[r^2 - 4r^2]} = \sqrt{16r^2}\end{aligned}$$

$= \sqrt{16}r$ प्राप्त होता है, जिसे आजकल के प्रतीकों में πr लिखा जावेगा। यह सूत्र अपने ढंग का एक है। उन गणितज्ञों ने π का मान $\sqrt{16}$ मानकर इस सूत्र को जन्म दिया। अनु कल कलन से यदि इसका मान ठीक निकालें तो इस सूत्र को साधित करना पड़ेगा :—

$$\begin{aligned}& \sqrt{r^2 - (r-h)^2} \\ \text{Total Arc} &= r \int_0^{\sqrt{r^2 - (r-h)^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{r^2 - x^2}\right)} dx.\end{aligned}$$

अथवा, बाण के आधार पर, केन्द्र पर आपतित कोण प्राप्त कर घनुष का प्रमाण निकाला जा सकता है।

गा. ४, १८२— जब जीवा (chord), और विस्तार (diameter) दिया गया हो तो बाण (Height of the segment) निकालने के लिये यह सूत्र दिया है :—

$$\begin{aligned}h &= \frac{d}{2} - \left[\frac{d^2}{4} - \frac{(\text{chord})^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= r - \left[r^2 - \left(\frac{\text{chord}}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

१ हालैण्ड के प्रसिद्ध गणितज्ञ और भौतिकशास्त्री हाइजिन्स (१६२९-१६९५) ने घनुष और जीवा से सम्बन्धित निम्न लिखित सूत्र दिये हैं।

$$(1) \text{Arc} = \frac{8[\text{Half the Arc}] - \text{Chord of the whole Arc}}{3} \text{ nearly}$$

$$(2) \text{Arc} = \frac{\text{Chord} + 256(\text{quarter the arc}) - 40(\text{Half the arc})}{45} \text{ nearly}$$

इन सूत्रों में Chord का मान $\sqrt{4[r^2 - (r-h)^2]}$ रखा जा सकता है तथा ग्रन्थकार द्वारा दिये गये सूत्र से तुलना की जा सकती है।

२ जम्बूद्वीपप्रज्ञप्ति २।२५, ६।११.

स्पष्ट है, कि यह सूत्र, निम्न लिखित समीकरण को साधित करने पर प्राप्त किया गया होगा :—
 $xh^2 + (\text{जीवा})^2 - 2r \cdot h = 0,$

$$\text{जहाँ } h = r \pm \left[r^2 - \left(\frac{\text{जीवा}}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ प्राप्त होता है।}$$

उपर्युक्त सूत्र में \pm की जगह केवल - (ऋण) ग्रहण करना उल्लेखनीय है। प्राप्त होनेवाले दो प्रमाणों में से छोटी अवस्था के लिये प्रमाण प्राप्त करना उनके लिये इष्ट था।

पुनः, गाथा, १८० और १८१ में दिये गये सूत्रों में से x निरसित (eliminate) करने पर धनुष, जीवा और बाण में सम्बन्ध प्राप्त होता है :—

$$(\text{धनुष})^2 = ६h^2 + (\text{जीवा})^2$$

तथा, $४h^2 + ४\left(\frac{\text{जीवा}}{२}\right)^2$ को ४ (अर्द्ध धनुष की जीवा)^२ लिखने पर हमें निम्न लिखित सम्बन्ध प्राप्त होता है :—

$$(\text{धनुष})^2 = २h^2 + ४(\text{अर्द्ध धनुष की जीवा})^2$$

इसी प्रकार अन्य सम्बन्ध भी प्राप्त किये जा सकते हैं।

गा. ४, २७७-२८३— इन गाथाओं में निश्चय काल का स्वरूप बतलाया गया है।

गा. ४, २८५-८६— व्यवहार काल की इकाई 'समय' मानी गई है। इसे अविभागी काल भी माना है जो उतने काल के बराबर होता है, जितने काल में पुद्गल का एक परमाणु आकाश के दो उत्तरोत्तर स्थित प्रदेशों के अन्तराल को तय करता है^१।

असंख्यात समयों की एक आवलि और संख्यात आवलियों का एक उच्छ्वास होता है— इसे ग्रंथकार ने निम्न लिखित रूप में अंकसंख्याओं द्वारा प्रदर्शित किया है $\frac{१}{२} \left| \frac{१}{६} \right| १$; हो सकता है कि असंख्यात का निरूपण २ तथा संख्यात का ६ के द्वारा किया हो। आगे,

७ उच्छ्वास = १ स्तोक; ७ स्तोक = १ लव, ३८३ लव = १ नाली, २ नाली = १ मुहूर्त, ३० मुहूर्त = १ दिन, १५ दिन = १ पक्ष, २ पक्ष = १ मास, २ मास = १ ऋतु, ३ ऋतु = १ अयन, २ अयन = १ वर्ष, और ५ वर्ष = १ युग होता है। इस प्रकार, आगे बढ़ते हुए, एक बड़ा व्यवहार

१ यहाँ स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि किस गति से परमाणु गमन करता होगा, क्योंकि मंदतम गति कहना भी आपेक्षिक निरूपण है प्रकेवल नहीं। वीरसेन के अनुसार, ऐसा प्रतीत होता है, कि परमाणु ऐसे एक समय में १४ राजु प्रमाण दूरी भी अतिक्रमण कर सकता है। पर, पुनः समय अपरिभाषित ही रहता है, क्योंकि एक समय में विभिन्न दूरियों का अतिक्रमण गति को स्पष्ट कर देता है, पर स्वयं अस्पष्ट रहता है। यदि समय को अविभागी मानते हैं तो एक समय में १४ राजु अतिक्रमण होने से, ७ राजु अतिक्रमण कब हुआ होगा— इस तर्क का स्पष्टीकरण नहीं होता, क्योंकि ३ समय, "अविभाज्य" कल्पना के आधार पर सम्भव नहीं है। इस प्रकार यह कथन एक उपधारणा (postulate) बन जाता है, जहाँ तर्क और विवाद को स्थान नहीं है। डाक्टर आईस्टीन ने भी प्रकाश की अचल गति के सिद्धान्त को उपधारित कर, माइकेल्सन मारले प्रयोग आदि को समझाया है, जहाँ यदि प्रकाश की लहर पर ही बैठकर, प्रकाश के समान गतिमान होकर कोई अवलोकन कर्त्ता गमन करे तो वह यही अनुभव करेगा कि प्रकाश उसके आगे वही गति से जा रहा है, जैसा कि उसने गतिहीन अवस्था में अनुभव किया था। ऐसे लोक सत्य (universal truth) का अनुभव छद्मस्थ नहीं कर सकते। पर, गणितीय अंतर्दृष्टि से यह सम्भव है। ऐसा प्रतीत होता है, मानो एलिया के जीनो ने अंतिम दो तर्कों द्वारा इसी प्रश्न का समाधान करने का प्रयास किया हो। जीनो (४१५ ई. ४३५ ई. ईस्वी पूर्व) के चार तर्कों का सर्वमान्य समाधान गत प्रायः २३०० वर्षों से नहीं हो सका है। विशेष विवरण के लिये "Greek Mathematics by Heath, pp. 271-283, Edn. 1921". दृश्य है।

काल प्राप्त किया गया है। वह अचलाम है जो $(८४)^{३१} \times (१०)^{१०}$ वर्षों के समान है। मूल में दो बीच के नाम नहीं दिये गये हैं जिससे $(८४)^{३१} \times (१०)^{१०}$ वर्ष ही प्राप्त होते हैं। इस प्रकार यह संख्यात काल के वर्षों की गणना द्वारा, उत्कृष्ट संख्यात प्राप्त हो जाने तक ले जाने का संकेत है। अगले पृष्ठ पर उत्कृष्ट संख्यात प्राप्त करने की रीति दी गई है।

गा. ४, ३१०-१२—यहां यह बात उल्लेखनीय है कि जैनाचार्यों ने प्राकृत संख्याओं एवं राशि (set) सिद्धान्त के द्वारा असंख्यात और अनन्त की अवधारणाओं का दर्शन कराने का प्रयत्न किया है। असंख्यात और अनन्त की प्राप्ति प्राकृत संख्याओं पर क्रमबद्ध क्रियाओं द्वारा तथा असंख्यात एवं अनन्त गणात्मक संख्यावाली राशियों की सहायता से की है। यह बात भी सूचित कर दी गई है कि 'संख्यात' चौदह पूर्व के ज्ञाता श्रुतकेवली का विषय है (देखिये पृ० १८०), 'असंख्यात' अवधिशानी का विषय है (पृ० १८२), और 'अनन्त' केवली का विषय है (पृ० १८३), अर्थात् इन्हीं निर्दिष्ट व्यक्तियों को इनका दर्शन (perception) हो सकता है। जैसे, असंख्यात प्रदेशों युक्त रत्नगुल की सरल रेखा का दर्शन हमारे लिये सहज है, उसी तरह 'अनन्त रूप में अवस्थित' ज्ञान की सामग्रियां केवली के लिये अनन्त रूप में दृष्टिगोचर होती होंगी। इस पर सभी एक मत न हों, पर ज्ञान के विकास के इतने उच्च श्रेणियुक्त आदर्श की कल्पना करना भी हानिप्रद नहीं है।

अनन्त (infinite) के कई प्रकार जैनाचार्यों ने स्थापित किये हैं : जैसे, (१) नामानन्त (Infinite in Name), स्थापनानन्त (Attributed Infinite), (२) द्रव्यानन्त (Infinity of substances), (४) गणनानन्त^३ (Infinite in Mathematics), (५)

१ "In history of Western philosophy the term 'Infinite' to $\alpha\pi\epsilon\iota\sigma\tau\omicron\upsilon$ is met with, apparently for the first time, in the teaching of Anaximander (6th cent. B.C.). He used it to describe what he conceived to be the primal matter, 'principle', or origin of all things."—Encyclopaedia Britannica, Vol. 12, p. 340, Edn. 1929.

२ "The chief types of infinitude which come to the attention of the mathematician and philosopher are cardinal infinitude, ordinal infinitude, the infinity of measurement, the ∞ of algebra, the infinite regions of geometry and the infinite of metaphysics."—The Encyclopedia Americana, vol 15, p. 120. Edn. 1944.

३ आगे, गणितीय अनन्त धारणा को निम्न लिखित रूप से इस तरह प्रदर्शित किया है, "If the law of variation of a magnitude is such that x becomes and remains greater than any preassigned magnitude however large, then x is said to become; infinite, and this conception of infinity is denoted by ∞ " इसी के सम्बन्ध में जेम्स पायरपोंट (James Pierpont) लिखते हैं, "Historically the first number to be considered were the positive integers 1, 2, 3, 4, 5, 6...we shall denote this system of numbers by ω . This system is ordered, infinite.....The symbols $+\infty$, $-\infty$ are not numbers; ie, they do not lie in ω . They are introduced to express shortly certain modes of variation which occur constantly in our reasonings." The Theory of Functions of Real Variables, Vol. 1, p. 86.

एक प्रसिद्ध गणितज्ञ का अनन्त के सम्बन्ध में विचार इस प्रकार उल्लेखित है :—"An infinite number," says Boscquet, "would be a number which is no particular number, for every particular is finite. It follows from this that infinite number is unreal." The Encyclopedia Americana, Vol. 15, p. 121. पर जैनाचार्यों द्वारा दी गई अनन्त की (आगे के पृष्ठ पर देखिये)

आरम्भ में Aaj की दो प्रतिराशियां स्थापित करते हैं, इनमें से एक Aaj राशि को शलाका प्रमाण स्थापित करते हैं। दूसरी Aaj राशि को विरलित कर उतनी ही राशि पुंज को १, १, रूप में स्थापित कर, परस्पर में गुणन कर b राशि उत्पन्न करते हैं, और Aaj शलाका प्रमाण राशि में से १ घटा देते हैं। अब b राशि का विरलन कर १, १, रूप को b राशि ही देकर परस्पर गुणन करके c राशि उत्पन्न करते हैं और अब Aaj शलाका प्रमाण राशि में से १ और घटा देते हैं। यह क्रिया तब तक करते जाते हैं, जब तक कि शलाका प्रमाण राशि Aaj समाप्त नहीं हो जाती। प्रतीक रूप से;

$$[Aaj]^{Aaj} = b; [b]^b = c; [c]^c = d; [d]^d = e;$$

इसी प्रकार करते जाने के पश्चात् जब Aaj बार यह क्रिया हो चुके तब मान लो j राशि उत्पन्न होती है।

फिर से, j राशि की दो प्रति राशियां करके, एक को शलाका रूप स्थापित कर और दूसरी को विरलित कर, एक, एक अंक के प्रति j ही स्थापित कर परस्पर गुणन करने से जो k राशि उत्पन्न हो तो शलाका प्रमाण राशि j में से एक घटा देते हैं। फिर इस k को लेकर उसी प्रकार विरलित कर, १, १ रूप के प्रति k, k , स्थापित करने पर जो l राशि उत्पन्न हो तो शलाका प्रमाण स्थापित राशि j में से १ और घटा देते हैं। इस प्रकार यह क्रिया तब तक करते जाते हैं, जब तक कि j शलाका राशि समाप्त नहीं हो जाती। प्रतीक रूप से;

$$[j]^j = k; [k]^k = l; [l]^l = m, \dots \text{इत्यादि जब तक करते जाते हैं, जब तक कि } j \text{ बार यह क्रिया न हो जावे, और अंत में मान लो } P \text{ राशि उत्पन्न होती है।}$$

अब फिर से P राशि की दो प्रतिराशियां करके, एक को शलाकारूप स्थापित कर और दूसरी को विरलित कर, एक, एक अंक के प्रति P ही स्थापित कर परस्पर गुणन करने से जो Q राशि उत्पन्न

beyond this ω^2+1 , and so on, it is said, indefinitely and for ever. If the first step— after which all the rest seems to follow of itself— offers any difficulty, we have to grasp the scheme 1, 3, 5, ... $2n+1, \dots, I_2$, in which, after all the odd natural numbers have been counted off, 2, which is not one of them, is imagined as the next in order. One purpose of Cantor in constructing these transfinite ordinals. $\omega, \omega+1, \dots$ was to provide a means for the counting of well ordered classes. a class being well-ordered if its members are ordered and each has a unique 'Successor'."

इसके पश्चात् दूसरे अवतरण में इसी पृष्ठ पर उल्लिखित है—

"For cardinal numbers also Cantor described 'an Infinite bigger than an Infinite' to confound the Simpliciuses..... He proved (1874) that the class of all algebraic numbers is denumerable, and gave (1878) a rule for constructing an infinite non-denumerable class of real numbers. Were we to make a list of spectacularly unexpected discoveries in mathematics, there two might head our list."

परन्तु, जहां जैनाचार्यों ने वरिमा में स्थित प्रदेश बिन्दुओं की संख्या समतल या सरल रेखा पर, स्थित प्रदेश बिन्दुओं की संख्या से भिन्न मानी है, वहां जार्ज कैंटर ने असंख्यसी-सा दिखनेवाला प्रतिपादन किया है जो इसी पुस्तक में पृष्ठ २७७ पर इस प्रकार अंकित है— "Cantor proved that in each instance all the points in the whole space can be put in one-one correspondence with

हो, तो शलाका प्रमाण राशि P में से एक घटा देते हैं। फिर Q को लेकर उसी प्रकार विरलित कर, १, १ रूप के प्रति Q , Q स्थापित करने पर जो R राशि उत्पन्न होती है, तो शलाका प्रमाण स्थापित राशि P में से १ और घटा देते हैं। इस प्रकार यह क्रिया तब तक करते जाते हैं, जब तक कि शलाका राशि P समाप्त नहीं हो जाती। प्रतीक रूप से;

$$[P]^P = Q, [Q]^Q = R \text{ इत्यादि}$$

और जब यह क्रिया P बार की जा चुके तब अंत में उत्पन्न हुई राशि मान लो T है। ऐसा प्रतीत होता है कि वीरसेनाचार्य ने D को Δa_j की तीसरी बार वर्गित सम्बर्गित राशि कहा है। हम, इस तीसरी बार वर्गित सम्बर्गित प्रक्रिया के लिये $\overline{\overline{\overline{\quad}}}$ ³ संकेतना का उपयोग करेंगे।

all the points on any straight-line segment. In a plane, for example, there are precisely as many points on a segment an inch long as there are in the entire plane. (?) This, of course, is contrary to common sense; but common sense exists chiefly in order that reason may have its simplicities to contradict & enlighten".

और, अभिनवावधि में ही प्रसाधित वह प्रश्न जिसने कैंटर को भी स्तब्ध कर दिया था, यह था, "Another problem which baffled Cantor was to prove or disprove that there exists a class whose cardinal number exceeds that of the class of natural numbers and is exceeded by that of the class of real numbers..." इस प्रकार के अल्पबहुत्व (comparability) सम्बन्धी प्रकरण में जैनाचार्यों ने जो परिणाम सूत्रों द्वारा उल्लिखित किये हैं वे खोज की दृष्टि से अत्यन्त महत्त्वपूर्ण हैं।

विशद विवेचन के लिये Fraenkel की "Abstract Set Theory" दृष्ट्य है।

आगे, जैनाचार्यों की अनन्ती की अवधारणा से हारवर्ड के प्रोफेसर रायस की निम्न लिखित कुछ अवधारणाओं से तुलना करिये, जो Encyclopedia Americana vol. 15 के पृष्ठ १२० आदि से यहाँ उद्धृत की गई है :

"1) The true infinite, both in magnitude and in organisation, although in one sense endless, & so incapable in that sense of being completely grasped, is in another, and precise sense, something perfectly determinate.

2) This determinateness is a character which indeed, includes and involves the endlessness of an infinite series, but the mere endlessness of an infinite series is not its primary character, but simply a negatively result of the self representative character of the whole system.

3) The endlessness of this series means that by no merely successive process of counting in God or in man, is its wholeness ever exhausted.

4) In consequence the whole endless series in so far as it is a reality must be present, as a determinate order, but also all at once, to the absolute experience. It is the process of successive counting, as such, that remains, to the end incomplete - so as to imply that its own possibilities are not yet realized"

गणित के इतिहासकारों द्वारा कहा जाता है कि सबसे पूर्ण प्राकृत संख्याओं के द्वारा इस संहति से दूसरी नवीन संहति (मिर्गो) की खोज वेत्रीलेन और मिश्र के निवासियों ने व्युत्क्रम करने की रीति (Method of Inversion) से की थी। प्राथमिक व्युत्क्रम की अन्य रीतिया योग और वियोग;

$$Iy_j = [Ip_j]^{1p} = \text{अमन्य सिद्ध राशि}$$

$$\text{और } Iy_j = Ipu + 1$$

$$\text{किं } Iyu > Iym > Iy_j > Ipu$$

$$\text{तथा } Iij = [Iy_j]^2 = Iyu + 1$$

Iij से उत्कृष्ट अनन्तान्त प्राप्त करने के लिये अघन्य अनन्तान्त को पूर्ववत् तीसरी बार वर्गित सम्मर्गित करने पर भी Iiu प्राप्त नहीं होता^१। मान लो ∞ प्रमाण संख्या प्राप्त होती है। इस ∞ में सिद्ध, निगोद जीव, वनस्पति, काल, पुद्गल और समस्त अलोकाकाश की छह अनन्त गणात्मक संख्याओं को मिलाकर योग को पूर्ववत् तीन बार वर्गित संवर्गित करते हैं, तिस पर भी उत्कृष्ट अनन्तान्त प्राप्त न होकर मान लो β राशि उत्पन्न होती है। इस β में, तब, केवलज्ञान अथवा केवलदर्शन के अनन्त बहुभाग (उक्त प्रकार से प्राप्त राशि से हीन ?) मिलाने पर Iiu उत्पन्न होता है। वह भाजन है, द्रव्य नहीं है; क्योंकि इस प्रकार वर्ग करने उत्पन्न सब वर्ग राशियों का पुंज ($\beta-1$) केवलज्ञान केवलदर्शन के अनन्तवै भाग है। यह ध्यान देने योग्य है कि Aa तथा Ii को Aam तथा Iim अथवा अवघन्यानुत्कृष्ट Aa तथा Ii निर्देशित किया गया है।

अब हम कुछ उल्लेखनीय बातों का विवेचन करेंगे। यद्यपि अप्रतिष्ठित प्रत्येक वनस्पतिकायिक जीवों की संख्या का प्रमाण लोकाकाश में माने गये प्रदेशों की संख्या से असंख्यातगुण है, तथापि उपचार से उस प्रमाण को असंख्यात सहा दी गई है। इसी प्रकार, यद्यपि उपरोक्त प्रमाण से असंख्यात लोक प्रमाण संख्या गुणा प्रतिष्ठित प्रत्येक वनस्पतिकायिक जीव राशि के गणात्मक का प्रमाण है तथापि उपचार से उसे असंख्यात लोक प्रमाण कहा गया है। स्मरण रहे कि 'असंख्यात' शब्द से केवल एक संख्या का बोध नहीं होता, बल्कि उस सीमा में रहनेवाली संख्याओं का बोध होता है जो न तो संख्यात हैं और न अनन्त। इस प्रकार असंख्यात संख्या की असंख्यातगुणी संख्या भी असंख्यात सीमा में ही रहेगी, उसका उल्लंघन न करेगी। जैसा, मुझे प्रतीत होता है, उसके अनुसार, मध्यम असंख्यात-असंख्यात भी संख्यात है। अर्थात् उसकी गणना हो सकती है, पर उसे उपचार रूप से असंख्यात की उपाधि दे दी गई है। वास्तविक असंख्येयता तभी प्रविष्ट करती है जब कि घर्मादि द्रव्यों के असंख्यात प्रमाण प्रदेशों से मध्यम असंख्यातासंख्यात को युक्त करते हैं। इसके पूर्व, उत्कृष्ट संख्यात तक ही श्रुतकेवली का विषय होने के कारण, तदनुगामी संख्या यद्यपि असंख्यात कहलाती है, पर परिभाषानुसार नहीं होती, उपचार से कहलाती है। असंख्यात लोक प्रमाण स्थितिवन्धाध्यवसायस्थान प्रमाण संख्या का आशय स्थितिवन्ध के लिये कारणभूत आत्मा के परिणामों की संख्या है। इसी प्रकार इससे भी असंख्यात लोक गुणे प्रमाण अनुमागवन्धाध्यवसायस्थान प्रमाण संख्या का आशय अनुमागवन्ध के लिये कारणभूत आत्मा

१ सिद्धों की संख्या अभी तक अनन्त मानी गई है पर वह सम्पूर्ण लोक के जीवों की कुल संख्या से अनन्तगुनी हीन है। निगोद जीवों (akin to bacteria and unicellular organism of modern biology but conceived to die and to come to life eighteen times during time of one breath) की संख्या सिद्धों की संख्या से अनन्तगुनी बड़ी मानी गई है। वनस्पतिकाय जीवों की संख्या भी सिद्धों की संख्या से अनन्तगुनी बड़ी मानी गई है। उसी प्रकार लोकाकाश के पुद्गल द्रव्य के परमाणुओं की संख्या जीव राशि से अनन्तगुनी बड़ी मानी गई है। त्रिकाल में समयों की कुल संख्या पुद्गल के परमाणुओं की संख्या से अनन्तगुनी मानी गई है और अलोकाकाश के प्रदेशों की संख्या अनन्तान्त मानी गई है।

के परिणामों की संख्या है। इससे भी असंख्यात लोक प्रमाणगुणे, मन वचन काय योगों के अविभाग-प्रतिच्छेदों (कर्मों के फल देने की शक्ति के अविभागी अंशों) की संख्या का प्रमाण होता है।

इसी प्रकार यद्यपि उत्कृष्ट असंख्यातासंख्यात और जघन्य परीतानन्त में केवल १ का अंतर हो जाने से ही 'अनन्त' संज्ञा उपचार रूप से प्राप्त होती है। अवधिज्ञानी का विषय उत्कृष्ट असंख्यात तक का होता है, इसके पश्चात् का विषय केवलज्ञानी का होने से, अनन्त संज्ञा प्राप्त हो जाती है। वास्तव में, व्यय के अनन्त काल तक भी होते रहने पर जो राशि क्षय को प्राप्त न हो उसे 'अनन्त' कहा गया है। इस प्रकार, जब जघन्य अनन्तानन्त की तीन बार वर्णित सम्बर्णित राशि में, अनन्त राशियाँ मिलाई जाती हैं, तभी उसकी अनन्त संज्ञा सार्थक होती है।

वीरसेनाचार्य ने अर्द्ध पुद्गलपरिवर्तन काल के अनन्तत्व के व्यवहार को उपचार निबन्धनक बतलाया है^१। भव्य जीव राशि भी अनन्त है।

शंका होती है कि जब अर्द्ध पुद्गलपरिवर्तन काल की समाप्ति हो जाती है तो भव्य जीव राशि भी क्यों क्षय को प्राप्त न होगी? इस पर आचार्य ने कथन किया है कि अनन्त राशि वही है जो संख्यात या असंख्यात प्रमाण राशि के व्यय होने पर भी अनन्त काल से भी क्षय को प्राप्त नहीं होती। अर्द्ध पुद्गलपरिवर्तन काल, यद्यपि 'अनन्त' संज्ञा को अवधिज्ञान के विषय का उल्लेखन करके प्राप्त है, तथापि असंख्यात सीमा में ही है। इस प्रकार, व्यय के होते रहने पर भी, सदा अक्षय रहनेवाली भव्य जीव राशि समान और भी राशियाँ हैं जो क्षय होनेवाली पुद्गलपरिवर्तन काल जैसी सभी राशियों के प्रतिपक्ष के समान, उपर्युक्त विवेचनानुसार पाई जाती हैं।

जार्ज कैंटर ने प्राकृत संख्याओं (१, २, ३, अनन्त तक) के गणात्मक प्रमाण को एक राशि अथवा कुलक मान किया है, जिसे No (Aleph Nought) प्रतीक से निर्देशित किया है। इस अनन्त प्रमाण राशि से, गण्य (Denumerable) राशियों के प्रमाण स्थापित किये गये हैं और सिद्ध किया गया है कि $2No = No$, तथा $(No)^2 = No$ आदि।

इसी प्रकार No से बड़ी संख्या का आविष्कार, गणित क्षेत्र में अद्वितीय है। कर्ण विधि (Diagonal Method) के द्वारा सिद्ध किया गया है कि

$2No > No$. विशद विवेचन अत्यन्त रोचक है तथा जैनाचार्यों की विधियों से उनका तुलनात्मक अध्ययन, सम्भवतः गणित के लिये नवीन पथ प्रदर्शित कर सकेगा।

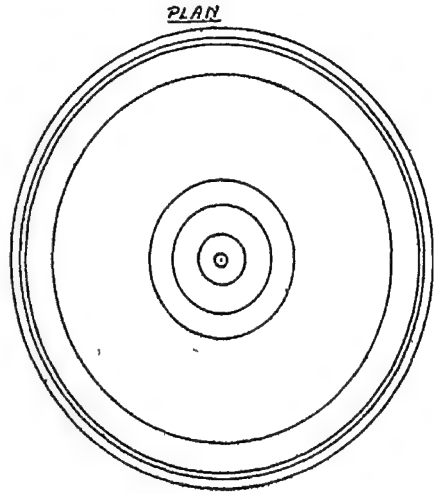
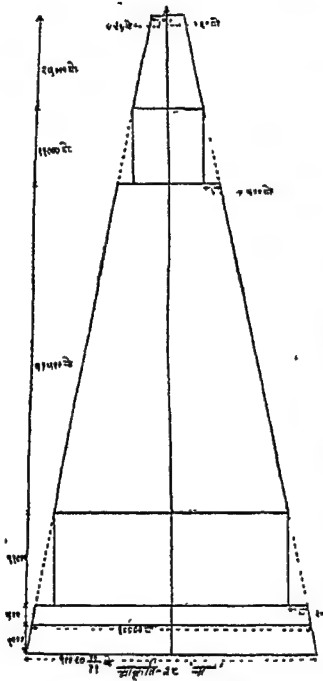
यहाँ ग्रंथकार ने यह भी कथन किया है कि जहाँ जहाँ संख्यात S को खोजना हो, वहाँ वहाँ अजघन्यानुत्कृष्ट संख्यात (Sm) जाकर ग्रहण करना चाहिये (जो एक स्थिर राशि नहीं है वरन् ३ से लेकर आगे तक की कोई भी राशि हो सकती है जो उत्कृष्ट संख्यात से छोटी है)। उसी प्रकार जहाँ जहाँ असंख्यातासंख्यात की खोज करना हो वहाँ वहाँ अजघन्यानुत्कृष्ट असंख्यातासंख्यात (Aam) को ग्रहण करना चाहिये; तथा अंत में जहाँ जहाँ अनन्तानन्त का ग्रहण करना हो वहाँ वहाँ lim का ग्रहण करना चाहिये।

गा. ४, १४४३— मूल में जो संहति दी गई है उसमें चौथी पंक्ति में रुद्र की अंक संहति ४ मान कर प्रतीक रूप से उसे उन चौतीस कोटों में स्थापित किया गया है।

गा. ४, १६२४— हिमवान् पर्वत की उत्तर जीवा २४९३२१६ योजन, तथा धनुष्य २५२३०१६ योजन है। यह सब गणना, उपर्युक्त सूत्रों से, π का मान $\sqrt{10}$ मान कर की गई है।

(गा. ४, १७८० आदि)

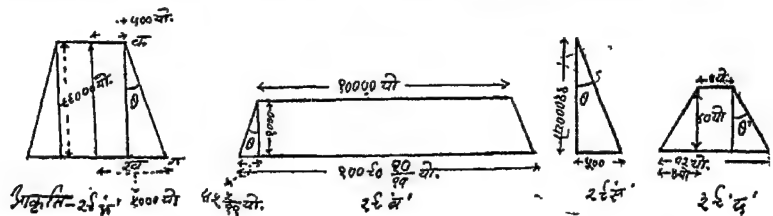
मान को प्रमाण न लेकर मेरु पर्वत का आकार
आकृति-२८ 'अ', 'ब' से स्पष्ट हो जावेगा—



आकृति २८ 'ब'

यह आकृति रम्भों तथा शंकु समच्छिन्नकों से बनी हुई है। मूल गाथा में इसे समान गोल शरीर-वाला मेरु पर्वत 'समवृद्धतणुस्र मेरुस' कहा गया है। सबसे निम्न भाग में चौड़ाई या समतल आधार का व्यास १००९० १/२ योजन है और यह समान रूप से घटता हुआ १००००० योजन ऊँचाई पर, केवल १००० योजन चौड़ा रह गया है।

मेरु पर्वत का समान रूप से हास ऊपर की ओर होता है। प्रवण रेखा लम्ब से θ कोण बनाती है जिसकी स्पर्श निष्पत्ति, $\tan \theta = \frac{\text{ख ग}}{\text{क ख}} = \frac{४५००}{१९०००} = \frac{५००}{१९०००}$ है। यहाँ आकृति-२९ अ और ब देखिये।



मूल भाग में १००० योजन तक समरूप से यह पर्वत हासित होता गया है। व्यास, तल में १००९० १/२ योजन है तथा १००० योजन ऊँचाई पर १०००० योजन है। इसलिये, प्रवण रेखा यहाँ भी

उदग्र रेखा से θ कोण पर अभिनत है, जिसकी स्पर्श निष्पत्ति स्प $\theta = \frac{4599}{1000} = \frac{400}{11000}$ है।

इसके पश्चात्, ५०० योजन की ऊँचाई पर जाकर व्यास ५०० योजन चारों ओर से घट जाता है तथा इसी व्यास का रम्भ ११००० योजन की ऊँचाई तक रहता है।

यहाँ (आकृति-२९ स) उदग्र रेखा अथवा रम्भ की जनन रेखा प्रवण रेखा से θ कोण बनाती है, जिसकी स्पर्श निष्पत्ति फिर से स्प $\theta = \frac{400}{11000}$ है।

इसी प्रकार, ५१५०० योजन ऊपर जाकर व्यास चारों ओर ५०० योजन घटता है तथा उस पर ११००० योजन उत्सेध की रम्भ स्थापित रहती है। अंत में २५००० योजन ऊपर और जाकर ५०० योजन विच्य चारों ओर से ४९४ योजन कम होती है, इसलिये केवल १२ योजन चौड़े तलवाली तथा ४० योजन उत्सेध की, मुख में ४ योजन व्यासवाली चूल्का सबसे ऊपर, अंत में, रहती है (आकृति-२९ द)। चूल्का की पार्श्व रेखा उदग्र से θ' कोण बनाती है जिसकी स्पर्श निष्पत्ति स्प $\theta' = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ है।

गा. ४, १७९३— इस गाथा में, शंकु के समच्छिन्नक की पार्श्व रेखा का मान निकालने के लिये जिस सूत्र का प्रयोग किया है वह प्रतीकरूप से यह है^१ (आकृति-३० अ) —

यहाँ भूमि D, मुख d, ऊँचाई h, पार्श्वसुजा को l माना गया है, तदनुसार ;

$$L = \sqrt{\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 + (H)^2}$$

गा. ४, १७९७— जिस तरह त्रिभुज संक्षेत्र (Triangular Prism) के समच्छिन्नक (Frustrum) के अनीक समलम्ब चतुर्भुज होते हैं, उसी प्रकार शंकु के समच्छिन्नक को उदग्र समतल द्वारा केन्द्रीय अक्ष में से होता हुआ काटा जावे तो छेद से प्राप्त आकृतियाँ भी समलम्ब चतुर्भुज प्राप्त होती हैं। इसलिये, यहाँ सूत्र में, पहिले दिया गया सूत्र उपयोग में लाया जाता है।

यदि, चूल्का के शिखर से h योजन नीचे विष्कम्भ x निकालना हो, तो निम्न लिखित सूत्र का उपयोग किया जा सकता है।

(आकृति-३० ब)

$$x = h \div \left[\frac{D-d}{H} \right] + b$$

$$\text{अथवा } x = D - \left[(H-h) \div \left(\frac{D-b}{H} \right) \right]$$

उपर्युक्त सूत्रों का उपयोग, १७९८-१८०० गाथाओं में किया गया है।

गा. ४, १८९९— इस गाथा में समवृत्त रत्नरूप, “समवृट्टो चेद्वदे रयणथूहो” का नाम शंकु के लिये आया है।

गा. ४, ७११ आदि— ग्रंथकार ने समवृत्त रत्नरूप को आनुपूर्वी ग्रंथ के अनुसार वर्णन करने में कुछ क्षेत्रों का वर्णन किया है। मुख्य ये हैं—

सबसे पहिले सामान्य भूमि का वर्णन है जो सूर्यमंडल के समान गोल, चारह योजन प्रमाण विस्तार-वाली (ऋषभदेव तीर्थंकर के समय की) है । इसके पश्चात् , स्तूप का वर्णन है जिसके सम्बन्ध में आकार, लम्बाई, विस्तार, आदि का कथन नहीं है ।

गा. ४, ९०१— सम्भवतः सदा प्रचलित महाभाषाएँ १८ तथा क्षुद्रभाषाएँ (dialects) ७०० हैं^१, ऐसा ज्ञात होता है ।

गा. ४, ९०३-९०४— विशेषतया उल्लेखनीय यह वाक्य है “भगवान् जिनेन्द्र की स्वभावतः अस्त्वलित और अनुपम दिव्य ध्वनि तीनों सध्याकालों में नव मुहूर्तों तक निकलती है” ।

गा. ४, ९२९— यहां उन विविध प्रकार के जीवों की संख्या पत्थ के असंख्यातवें भाग प्रमाण दी है जो जिन देव की बन्धना में प्रवृत्त होते हुए स्थित रहते हैं ।

गा. ४, ९३०-३१— कोटों के क्षेत्र से यद्यपि जीवों का क्षेत्रफल असंख्यातगुणा है, तथापि वे सब जीव जिन देव के माहात्म्य से एक दूसरे से अस्पृष्ट रहते हैं । जालकप्रभृति जीव प्रवेश करने अथवा निकलने में अन्तर्मुहूर्त काल के भीतर संख्यात योजन चले जाते हैं (यद्वा इस गति को मध्यम संख्यात ग्रहण करना चाहिये, पर मध्यम संख्यात भी कोई निश्चित संख्या नहीं है) ।

गा. ४, ९८७-९७— दूरश्रवण और दूरदर्शन ऋद्धियों की इस कल्पना को विज्ञान ने क्रियात्मक कर दिखलाया है । वह ऋद्धि आत्मिक विकास का फल थी, वह Radio या television भौतिक उन्नति का फल है । दूरदर्श तथा दूरग्राण भी निकट भविष्य में कार्यान्वित हो सकेंगे । इसी प्रकार हो सकता है कि दूरस्वादित्व प्रयोग भी सम्व हो सके । दूरस्वादित्व की सिद्धि के लिये दशा है: जिह्वेन्द्रिया-वरण, श्रुतज्ञानावरण और वीर्यान्तरायका उत्कृष्ट क्षयोपशम तथा धांगोपाग नामकर्म का उदय हो । सीमा, जिह्वा के उत्कृष्ट विषयक्षेत्र के बाहिर, संख्यात योजन प्रमाण क्षेत्र में स्थित विविध रस है । दूरदर्शस्त्व ऋद्धि के लिये सीमा संख्यात योजन है । इसी प्रकार दूरग्राणस्त्व ऋद्धिसिद्ध व्यक्ति संख्यात योजनो में प्राप्त हुए बहुत प्रकार की गंधों को सूंघ सकता है । दूरश्रवणस्त्व तथा दूरदर्शित्व भी संख्यात योजन अर्थात् ४००० मील गुणित संख्यात प्रमाण दूरी की सीमा तक सिद्ध होता है । ऋद्धिमिद्ध व्यक्ति को बाह्य उपकरणों की आवश्यकता न थी, पर आज बाह्य उपकरणों से अनेक व्यक्ति उस ऋद्धि का विशिष्ट दशाओं में लाभ प्राप्त कर सकते हैं ।

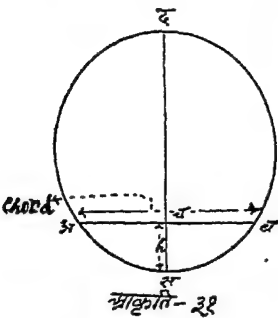
गा. ४, २०२५— इस गाथा में अ स व द अन्तर्वृत्त क्षेत्र का विष्कम्भ निकालने के लिये सूत्र दिया गया है जब कि अ व जीवा तथा च स बाण दिया गया हो । यहां आकृति-३१ देखिये ।

D = वृत्त का विष्कम्भ Diameter

c = जीवा chord

h = बाण height of the segment

$$\begin{aligned} \text{तब } D &= \frac{(c)^2}{4h} + h = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2}{h} \\ &= \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2} - h\right)^2 + h^2}{h} = \frac{Dh}{h} = D \end{aligned}$$



१ अभिनवावधि में प्राप्त “भूवल्य” ग्रंथ को अंकक्रम से विभिन्न भाषाओं में पढ़ा जा सकता है ।

इस पर खोज हो रही है ।

ति, ग. ९

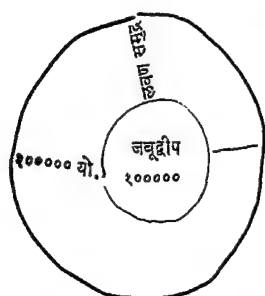
गा. ४, २३७४— इस गाथा में धनुष के आकार के (segment) क्षेत्र का सूक्ष्म क्षेत्रफल निकालने के लिये सूत्र दिया गया है।

पिछली गाथा में लिये गये प्रतीकों में

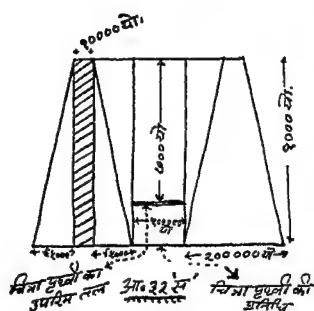
धनुषाकार क्षेत्र (segment) अ स ब च का क्षेत्रफल =

$$\sqrt{\left(\frac{h}{r} c\right)^2} \times r = \frac{hC}{r} \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$$

यह सूत्र अपने ढंग का एक है। महावीराचार्य ने गणितसारसंग्रह (७।७०३) में इसका उल्लेख किया है। इस सूत्र का प्रयोग अर्द्ध वृत्त का क्षेत्रफल निकालने के लिये किया जाय तो h का मान r और c का मान D लेना पड़ेगा। तदनुसार अर्द्ध वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{r \cdot D}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{D^2}} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{D^2}} \frac{r^2}{2}$



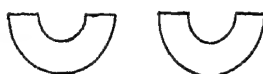
आकृति — ३२ (अ)



भाग बहुमध्य भाग है, जहां चारों ओर (वेरे में) उत्कृष्ट, मध्यम व जघन्य एक हजार आठ पाताल हैं। ये सब पाताल बड़े (vessel) के आकार के हैं।

गा. ४, २३९८-२४००— आकृति-३२ अ में बीचका वृत्त क्षेत्र जंबूद्वीप का निरूपण, तथा शेष क्षेत्र लवण समुद्र का निरूपण करता है।

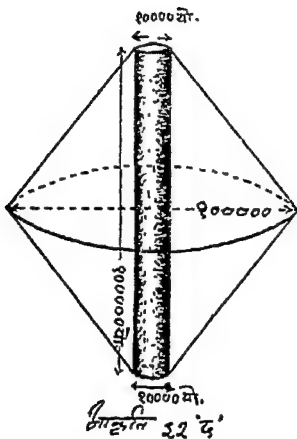
इसका आकार एक नाव के ऊपर दूसरी नाव रखने से प्राप्त हुई आकृति-३२ ब के समान है।



आकृति-३२ 'ब'

विवरण से (आकृति-३२ स) ज्ञात होता है कि लवण समुद्र की गहराई १००० योजन है। ऊपर विस्तार १०००० योजन और तल विस्तार २००००० योजन है। चित्र में मान को प्रमाण नहीं लिया गया है। यह समुद्र, चित्रा पृथ्वी के उपरिम तल से ऊपर कूट के आकार से आकाश में ७०० योजन ऊँचा स्थित है।

गा. ४, २४०३ आदि— हानि वृद्धि का प्रमाण मेरु आकृति की गणना के समान यहाँ भी है। १९० हानि वृद्धि प्रमाण लेकर, भूमि अथवा मुख से इच्छित ऊँचाई या गहराई पर, विष्कम्भ निकाला जा सकता है। रेखांकित

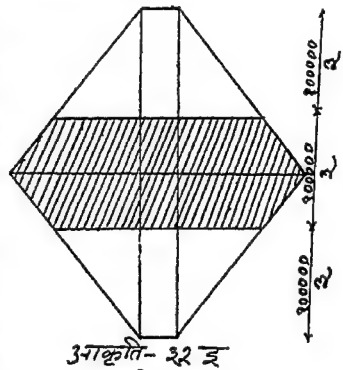


इस आकृति (३२ द) में ज्येष्ठ पाताल का आकार आदि दिये गये हैं।

ये पालल क्रम से हीन होते हुए (मध्य भाग से दोनों ओर) नीचे से क्रमशः वायु भाग, जल एवं वायु से चलाचल भाग, और केवल जल भाग में विभाजित हैं।

इन पातालों के पवन सर्व काल शुक्ल पक्ष में स्वभाव से (१) बढ़ते हैं और कृष्ण पक्ष में घटते हैं। शुक्ल पक्ष में कुल पंद्रह दिन होते हैं। प्रत्येक दिन पवन की २२२२३ योजन उर्ध्व में वृद्धि होती है, इस प्रकार कुल वृद्धि शुक्ल पक्ष के अंत में $२२२२३ \times १५ = ३३३३४५$ योजन होती है। इससे जल केवल ऊपरी त्रिभाग में तथा वायु निम्न दो त्रिभागों में ३३३३४५ उर्ध्व तक रहते हैं।

आकृति-३२ इ में रेखांकित भाग, जल एवं वायु से चलाचल है अर्थात् उस भाग में वायु और जल, पक्षों के अनुसार बढ़ते घटते रहते हैं। जब वायु बढ़कर दो त्रिभागों को शुक्लपक्षांत में व्याप्त कर लेती है तो जल, सीमांत का उल्लंघन कर, आकाश में चार हजार धनुष अथवा दो कोस पहुँचता है। फिर कृष्ण पक्ष में यह घटता हुआ, अभावस्था के दिन, भूमि के समतल हो जाता है। इस दिन, ऊपर के दो त्रिभागों में जल और निम्न त्रिभाग में केवल वायु स्थित रहता है। कम घनत्ववाली वायु का, जल के नीचे स्थित रहना, अस्वाभाविक प्रतीत होता है, किन्तु वह कुछ विशेष दशाओं में सम्भव भी है।



गा. ४, २५२५— ऐसा प्रतीत होता है कि ग्रंथकार को ज्ञात था कि दो वृत्तों के क्षेत्रफलों के अनुपात उनके विष्कम्भों के वर्ग के अनुपात के तुल्य होते हैं^१। यदि छोटे प्रथम वृत्त का विष्कम्भ D_1 , तथा क्षेत्रफल A_1 हो, और बड़े द्वितीय वृत्त का विष्कम्भ D_2 तथा क्षेत्रफल A_2 हो तो

$$\frac{D_2^2 - D_1^2}{D_1^2} = \left(\frac{A_2 - A_1}{A_1} \right) \text{ अथवा } \frac{D_2^2}{D_1^2} = \frac{A_2}{A_1}$$

गा. ४, २५३२ आदि— इन सूत्रों में एक और आकृति का वर्णन है। वह है, 'इष्वाकार आकृति'। इष्वाकार पर्वत निषध पर्वत के समान जंघे, लवण और कालोदधि समुद्र से संलग्न तथा अर्धतर भाग में अंकमुख व बाह्य भाग में क्षुरप्र के आकार के वतलाये गये हैं। प्रत्येक का विस्तार १००० योजन और अवगाह १०० योजन है।

१ जम्बूद्वीपप्रशस्ति, १०।८७, वृत्त के सम्बन्ध में समानुपात नियम २।११-२० में भी है।

गा. ४, २५७८— १७८१वीं गाथा में वर्णित मुख्य (जम्बूद्वीपस्थ) मेरु के सम्बन्ध में लिखा गया है। इस गाथा में धातकीखण्डद्वीपस्थ मन्दर नामक पर्वत का वर्णन है। इस मेरु का वित्सार तल भाग में १०००० योजन तथा पृथ्वीपृष्ठ पर ९४०० योजन है। यहाँ हानि वृद्धि प्रमाण $\frac{१०००० - ९४००}{१०००} = \frac{६}{१००}$ है। यह, अवगाह के लिये है। भूमि से ऊपर, हानि वृद्धि प्रमाण, $\frac{९४०० - १०००}{८४०००} = \frac{१}{१००}$ है।

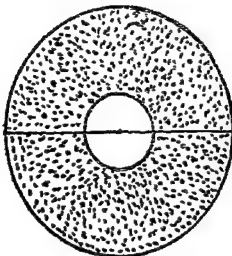
गा. ४, २५९७— इस गाथा में दिये गये सूत्र का स्पष्टीकरण १८० वीं गाथा में दिया गया है।

गा. ४, २५९८— इस गाथा में दिये गये सूत्र का स्पष्टीकरण २०२५ वीं गाथा में दिया गया है।

गा. ४, २७६१— इस गाथा में दिया गया सूत्र वृत्त का क्षेत्रफल निकालने के लिये है^१।

$$\begin{aligned} \text{वृत्त या समानगोल का क्षेत्रफल} &= \frac{\sqrt{\left[\frac{D^2}{4}\right]^2 \times १०}}{४} = \frac{D^2 \times \sqrt{१०}}{४} \\ &= \left(\frac{D}{२}\right)^2 \sqrt{१०} \text{ जिसे हम } \pi R^2 \text{ लिखते हैं।} \end{aligned}$$

गा. ४, २७६३— इस गाथा में वलयाकृति वृत्त अथवा वलय के आकार की आकृति का क्षेत्रफल निकालने के लिये सूत्र दिया है^२ (आकृति-३३ देखिये)।



आकृति-३३

यदि प्रथम वृत्त का वित्सार D_1 तथा द्वितीय का D_2 माना जाये तो वलयाकार (रेखांकित) क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left[2 D_2 - (D_2 - D_1)\right]^2 \times \left(\frac{D_2 - D_1}{4}\right)^2} \times १० \\ &= \sqrt{१०} \sqrt{\frac{(D_2 + D_1)^2 (D_2 - D_1)^2}{(४)^2}} \\ &= \sqrt{१०} \left[\frac{D_2^2}{४} - \frac{D_1^2}{४} \right] \end{aligned}$$

जिसे हम $\pi [R_2^2 - R_1^2]$ लिखते हैं।

गा. ४, २८१८— इस गाथा में दिये गये सूत्र का स्पष्टीकरण २०२५ वीं गाथा में देखिये।

गा. ४, २९२६—

जगश्रेणी
[सूर्यगुल] ५१८ - १ = सामान्य मनुष्य राशि प्रमाण।

इस प्रमाण को इस तरह लिखा गया है :—

जगश्रेणी में सूर्यगुल के प्रथम और तृतीय वर्गमूल का भाग देने पर जो लब्ध आवे उसमें से एक कम कर देने पर उक्त प्रमाण प्राप्त होता है। यहाँ [सूर्यगुल] ५१८ को लिखने की शैली, पुष्पदंत और भूतबलि द्वारा संरचित षट्खंडागम के सूत्रों से मिलती जुलती है। जैसे, द्रव्यप्रमाणानुगम में सत्रहवीं गाथा में नारक मिथ्यादृष्टि जीव राशि के प्रमाण का कथन यह है। “.....तासि सेदीर्ग विस्खलमसूत्रोऽंगुल-जगमूलं विदियवगमूलगुणदेण^३।”

१ जम्बूद्वीपप्रकृति १०।९२.

२ जम्बूद्वीपप्रकृति, १०।९१.

३ षट्खंडागम—द्रव्यप्रमाणानुगम, पृष्ठ १३१.

गा. ५, ३३— इस गाथामें अंतिम आठ द्वीप-समुद्रों के विस्तार भी गुणोत्तर श्रेढि में दिये गये हैं ।
अन्तिम स्वयंभूवर समुद्र का विस्तार—

(जगश्रेणी ÷ २८) + ७५००० योजन दिया गया है ।

इस समुद्र के पश्चात् १ राजु चौड़े तथा १००००० योजन बाह्यस्थित मध्यलोक तल पर पूर्व पश्चिम में

$$\begin{aligned} & \{ १ \text{ राजु} - [(\frac{१}{२} \text{ राजु} + ७५००० \text{ यो०}) + (\frac{१}{२} \text{ राजु} + ३७५०० \text{ यो०}) \\ & \quad + (\frac{१}{२} \text{ राजु} + १८७५० \text{ यो०}) + \dots\dots\dots ५०००० \text{ योजन}] \}'' \end{aligned}$$

जगह वचती है । यद्यपि १ राजु में से एक अनन्त श्रेढि भी घटाई जावे तब भी यह लम्बाई $\frac{१}{२}$ राजु से कुछ कम योजन बच रहती है । यह स्थापना सिद्ध करती है कि उन गणितज्ञों को इस गुणोत्तर, असंख्यात पदोंवाली श्रेढियों के योग की सीमा का ज्ञान भी था ।

गा. ५, ३४— यदि २nवें समुद्र का विस्तार D_{2n} मान लिया जाय और २n + १वें द्वीप का विस्तार D_{2n+1} मान लिया जाय तब निम्न लिखित सूत्रों द्वारा परिभाषा प्रदर्शित की जा सकेगी ।

$$D_n = D_{2n+1} \times २ - D_1 \times ३ = \text{उक्त द्वीप की आदि सूची}$$

$$D_m = D_{2n+1} \times ३ - D_1 \times ३ = \quad , \quad \text{मध्यम सूची}$$

$$D_b = D_{2n+1} \times ४ - D_1 \times ३ = \quad , \quad \text{बाह्य सूची}$$

यहाँ D_1 जम्बूद्वीप का विष्कम्भ है ।

इस सूत्र का परिवर्तित रूप द्वीपों के लिये भी उपयोग में लाया जा सकता है ।

$$\text{गा. ५, ३५— } n\text{वें द्वीप या समुद्र की परिधि} = \frac{D_1 \sqrt{10}}{D_1} \times \left[\frac{n\text{वें द्वीप या समुद्र की सूची}}{D_1} \right]$$

इस सूत्र में कोई विशेषता नहीं है ।

गा. ५, ३६— यहाँ इस सिद्धान्त की पुनरावृत्ति है, कि वृत्तों के व्यासों के वर्गों की निष्पत्ति का मान उतना ही होता है जितना कि वृत्तों के क्षेत्रफलों की निष्पत्ति का ।

यदि nवें द्वीप या समुद्र की बाह्य सूची D_{nb} तथा अन्तर सूची (अथवा आदि सूची) D_{na} प्ररूपित की जावें तो

$$\frac{(D_{nb})^2 - (D_{na})^2}{(D_1)^2} = \text{उक्त द्वीप या समुद्र के क्षेत्र में समा जानेवाले जम्बूद्वीप क्षेत्रों की संख्या होती है ।}$$

यहाँ D_1 जम्बूद्वीप का विष्कम्भ है तथा $D_{na} = D_{(n-1)} b$ है, चूँकि किसी भी द्वीप या समुद्र की बाह्य सूची, अनुगामी समुद्र या द्वीप की आदि या आन्तरिक सूची होती है ।

गा. ५, २४२— स्थूल क्षेत्रफल निकालने के लिये, ग्रंथकार ने π का मान स्थूल रूप से ३ ले लिया है और निम्न लिखित नवीन सूत्र दिया है—

$$n\text{वें द्वीप या समुद्र का क्षेत्रफल} = [D_n - D_1](३)^२ \{D_n\}$$

यहाँ $[D_n - D_1](३)^२$ को आग्राम कहा गया है ।

D_n ; nवें द्वीप या समुद्र का विष्कम्भ है ।

इस सूत्र का उद्गम निकालने योग्य है ।

इस सूत्रको दूसरी तरह भी लिख सकते हैं ।

$$D_n = २^{(n-1)} D_1 \text{ लिखने पर ,}$$

$$n \text{ वें द्वीप या समुद्र का क्षेत्रफल} = 2^{n-1} D_1 - D_1 2^{n-1} D_1 \\ = (2D_1)^2 [2^{n-1} - 1] 2^{n-1} \text{ होता है।}$$

n वें वलयाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालने के लिये सूत्र यह है :—

$$\text{बादर क्षेत्रफल} = Dn[Dna + Dnm + Dnb].$$

यहाँ Dnb का मान $= [2\{2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 2\} + 1]D_1$ है।

Dna का मान $= [2\{2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2\} + 1]D_1$ है।

$$Dnm = \frac{Dnb + Dna}{2} \text{ है।}$$

इनका मान रखने पर,

$$\begin{aligned} \text{बादर क्षेत्रफल} &= 2^{n-1} D_1 [Dna + \frac{1}{2}(Dna + Dnb) + Dnb] \\ &= 2^{n-1} (D_1)^2 \left[\frac{3}{2} \left\{ 2 + 2 \left(\frac{2(-1 + 2^{n-2})}{1-2} \right) + 2 \left(\frac{2(-1 + 2^{n-1})}{1-2} \right) \right\} \right] \\ &= 3(2^{n-1}) (D_1)^2 [1 + 2^{n-1} - 2 + 2(-1 + 2^{n-1})], \\ &= 3^2 [2^{n-1}] (D_1)^2 [2^{n-1} - 1] \end{aligned}$$

यह सूत्र, २४२वीं गाथा में दिये गये सूत्रानुसार फल देता है।

गा. ५, २४४— यह सूत्र पिछली गाथा के समान है।

$\{ \text{Log}_2 (Apj) + 1 \}$ वें द्वीप या समुद्र का क्षेत्रफल, $(Apj) (Apj - 1) \{ 1000 \text{ करोड़ योजन} \}$ वर्ग योजन होगा।

पिछली (२४३) वीं गाथा में n वें वलयाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $3^2 (D_1)^2 [2^{n-1}] [2^{n-1} - 1]$ बतलाया गया है जो $9(1000000)^2 [2^{n-1}] [2^{n-1} - 1]$ के बराबर है।

यदि हम $n = \text{Log}_2 Apj + 1$ लिखें तो,

$n - 1 = \text{Log}_2 Apj$ होगा और इसलिये, $2^{n-1} = Apj$ हो जावेगा। इस प्रकार, ग्रंथकार ने यहाँ छेदागणित के उपयोग का निदर्शन किया है। उन्होंने जघन्य परीतासंख्यात को १६ के द्वारा प्ररूपित किया है और १ कम जघन्य परीतासंख्यात को $(16 - 1)$ नहीं लिखा है वरन् १५ लिखा है जो उस समय के प्रतीकत्व ज्ञान के संपूर्ण रूप से विकसित न होने का द्योतक है।

इसी प्रकार, $\{ \text{Log}_2 (\text{पर्योपम}) + 1 \}$ वें द्वीप का क्षेत्रफल

$$= (\text{पर्योपम}) (\text{पर्योपम} - 1) \times 10000000000 \text{ वर्ग योजन होता है।}$$

आगे, स्वयंभूरमण समुद्र का क्षेत्रफल निकालने के लिये २४३ या २४४वीं गाथा में दिये गये सूत्र ‘बादर क्षेत्रफल $= Dn(3^2) (Dn - D_1)$ ’ का उपयोग किया गया है।

$$\text{इस समुद्र का विष्कम्भ } Dn = \frac{\text{जगश्रेणी}}{24} + 69000 \text{ योजन है, इसलिये, बादर क्षेत्रफल} =$$

$$[3^2 \text{ जगश्रेणी} + 69000 \text{ यो.}] \left(\frac{\text{जगश्रेणी}}{24} + 69000 \text{ यो.} - 100000 \text{ यो.} \right)$$

$$= \frac{9 \cdot (\text{जगश्रेणी})^2}{576} + \text{जगश्रेणी} \left(\frac{9}{24} \times (-29000 \text{ यो.}) + \frac{69000 \text{ यो.}}{24} \right) \\ - (29000 \text{ यो.} \times 69000 \text{ यो.})$$

$$= 3^2 (\text{जगश्रेणी})^2 + [112500 \text{ वर्ग यो.} \times 1 \text{ रात्रु}] \\ - 1980000000 \text{ वर्ग योजन होता है।}$$

१ ग्रंथकार ने लिखा है, कि यह द्वीप कर्मांक होगा अर्थात् यह संख्या ऊनी— अयुग्म होगी।

गा. ५, २४५— प्रतीक रूपेण, इस गाथा का निरूपण यह होगा :—

मान लो, इच्छित द्वीप या समुद्र n वों है; उसका विस्तार Dn है तथा आदि सूची का प्रमाण Dna है।

तब, शेष वृद्धि का प्रमाण $= 2Dn - \left(\frac{4Dn + Dna}{3} \right)$ होता है।

इसका साधन करने पर $\frac{2Dn - Dna}{3}$ प्राप्त होता है।

यहाँ $Dn = 2^{n-1}D$, है तथा $Dna = 1 + 2[2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2}]$ है।

अर्थात्, $Dna = [1 + 2(2^{n-1} - 2)]D$, यो. है।

$$\therefore \frac{2Dn - Dna}{3} = \frac{2^n D + [-1 - 2^n + 4]D}{3} = D,$$

$$= 100000 \text{ योजन होता है।}$$

गा. ५, २४६-४७— 'प्रतीक रूप से:—

$$100000 \text{ योजन} + \frac{Dna}{2} = \frac{Dnb + [Dn - 200000]}{2}$$

इस सूत्र में भी Dna , Dnb और Dn का आदेशन (substitution) करने पर दोनों पक्ष समान आ जाते हैं।

गा. ५, २४८— प्रतीक रूप से:—

$$\text{उक्त वृद्धि का प्रमाण} = \left\{ \frac{3}{2}(Dnb) - Dna \right\}$$

$$= 1\frac{1}{2} \text{ लाख योजन है।}$$

गा. ५, २५०— प्रतीक रूप से:—

$$\text{वर्णित वृद्धि का प्रमाण} = \frac{(3Dn - 200000) - \left\{ \frac{3Dn}{2} - 200000 \right\}}{2} \text{ है।}$$

$$\text{गा. ५, २५१— प्रतीक रूपेण, वर्णित वृद्धि का प्रमाण} = \frac{3}{2}Dn - \left\{ \frac{Dn - 200000}{2} \right\} \text{ है।}$$

गा. ५, २५२— चतुर्थ पक्ष की वर्णित वृद्धि को यदि Kn मान लिया जाय तो इच्छित वृद्धि-वाले (n वें) समुद्र से, पहिले के समस्त समुद्रों सम्बन्धी विस्तार का प्रमाण $= \frac{Kn - 200000}{2}$ होता है।

गा. ५, २५३— वर्णित वृद्धि $= \frac{(3Dn - 200000) - \left(\frac{3Dn}{2} - 200000 \right)}{2}$ है। यह सूत्र २५१ वीं गाथा में कथित सूत्र के सदृश है। अंतर केवल द्वीप और समुद्र शब्दों में है।

१ यहाँ वर्णित वृद्धियों का व्यावहारिक उपयोग प्रतीत नहीं होता। द्वीप और समुद्रों के विस्तार १, २, ४, ८, अर्थात् गुणोत्तर श्रेढि में दिये गये हैं। तथा द्वीपों के विस्तार १, ४, १६, ६४, भी गुणोत्तर श्रेढि में है जिसमें साधारण निष्पत्ति ४ है। उसी प्रकार समुद्रों के विस्तार क्रमशः २, ८, ३२, आदि दिये गये हैं जहाँ साधारण निष्पत्ति ४ है। इन्हीं के विषय में गुणोत्तर श्रेढि के योग निकालने के सूत्रों की सहायता से, भिन्न २ प्रकार की वृद्धियों का वर्णन ग्रंथकार ने किया है।

$$\text{गा. ५, २५४— वर्णित वृद्धि का प्रमाण} = \frac{Dn - १०००००}{३} \times २ + \frac{३०००००}{२} \text{ है।}$$

$$\text{गा. ५, २५५-५६— अर्द्ध जम्बूद्वीप से लेकर } n \text{ वें द्वीप तक के द्वीपों के सम्मिलित विस्तार का प्रमाण} = \frac{Dn}{४} + \frac{Dn - २ - १०००००}{३} - \frac{१००००००}{२} \text{ है।}$$

यहाँ $Dn = ४Dn - २$ है; क्योंकि यहाँ केवल द्वीपों के अल्पबहुत्व को निश्चित करने का प्रसंग चल रहा है।

$$\text{गा. ५, २५७— वर्णित वृद्धि} = \frac{Dn - १०००००}{३} + २०००००$$

$$\text{अथवा,} = \frac{Dn + ५०००००}{३} \text{ है।}$$

$$\text{गा. ५, २५८— अघस्तन द्वीपों के, दोनों दिशाओं सम्बन्धी विस्तार का योगफल} \\ \frac{२Dn - ५०००००}{३} \text{ है।}$$

$$\text{गा. ५, २५९— इष्ट (} n \text{ वें) समुद्र के, एक दिशा सम्बन्धी विस्तार में वृद्धि का प्रमाण} \\ = \frac{Dn + ४०००००}{३} \text{ है। यह प्रमाण अतीत समुद्रों के दोनों दिशाओं सम्बन्धी,}$$

विस्तार की अपेक्षा से है।

$$\text{गा. ५, २६०— अतीत समुद्रों के दोनों दिशाओं सम्बन्धी विस्तार का योग} \\ = \frac{२Dn - ४०००००}{३} \text{ है।}$$

$$\text{गा. ५, २६१— वर्णित क्षेत्रफल वृद्धि का प्रमाण} = \frac{३(Dn - १०००००) \times ४Dn}{(१०००००)^२} \text{ है,}$$

जो जम्बूद्वीप के समान, खंडों की संख्या होती है।

गा. ५, २६२— द्वीप समुद्रों के क्षेत्रफल क्रमशः ये हैं :

$$\text{प्रथम द्वीप : } \sqrt{१० \left(\frac{१०००००}{२} \right)^२} = \sqrt{१० (२५००००००००)} \text{ वर्ग योजन}$$

$$\text{द्वितीय समुद्र : } \sqrt{१० \left[\left(\frac{५०००००}{२} \right)^२ - \left(\frac{१०००००}{२} \right)^२ \right]} = \\ \sqrt{१० [६२५०००००००० - २५००००००००]}$$

$$\text{तृतीय द्वीप : } \sqrt{१० \left[\left(\frac{१३०००००}{२} \right)^२ - \left(\frac{५०००००}{२} \right)^२ \right]} = \\ \sqrt{१० [४२२५०००००००० - ६२५०००००००]}$$

$$\text{चतुर्थ समुद्र : } \sqrt{१० (१०)^८ \left[\left(\frac{२९०}{२} \right)^२ - \left(\frac{१३०}{२} \right)^२ \right]} = \\ \sqrt{१० (१०)^८ [२१०२५ - ४२२५]} \text{ वर्ग योजन इत्यादि।}$$

१ यह पहिले बतलाया जा चुका है कि n वें द्वीप या समुद्र का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{१० \{ (Dnb)^२ - (Dna)^२ \}} \text{ है।}$$

इसी सूत्र के आधार पर विविध क्षेत्रों के क्षेत्रफलों का अल्पबहुत्व प्रदर्शित किया गया है।

यहा लवण समुद्र का क्षेत्रफल $(१०)^{८३} [६००]$ वर्ग योजन है जो जम्बूद्वीप के क्षेत्रफल $(१०)^{८३}$ [२५] वर्ग योजन से २४ गुणा है। धातकीखंड द्वीप का क्षेत्रफल $(१०)^{८३} [३६००]$ वर्ग योजन है जो जम्बूद्वीप से १४४ गुणा है। इसी प्रकार, कालोदधि समुद्र का क्षेत्रफल $[१०]^{८३} [१६८००]$ वर्ग योजन है जो जम्बूद्वीप से ६७२ गुणा है तथा इस कालोदधि समुद्र का क्षेत्रफल धातकीखंड द्वीप की खंडशलाकाओं से ४ गुणा होकर ९६ अधिक है, अर्थात् $६७२ = (१४४ \times ४) + ९६$ । पुनः, पुष्करवर द्वीप का क्षेत्रफल $= (१०)^{८३} \left[\left(\frac{६१०}{२} \right)^२ - \left(\frac{२९०}{२} \right)^२ \right]$ वर्ग योजन अथवा $(१०)^{८३} [७२०००]$ वर्ग योजन है जो जम्बूद्वीप से २८८० गुणा है तथा कालोदधि समुद्र की खंडशलाकाओं से चौगुना होकर ९६×२ अधिक है; अर्थात् $२८८० = (४ \times ६७२) + २(९६)$ है; इत्यादि। साधारणतः यदि किसी अवस्तन द्वीप या समुद्र की खंडशलाकायें Ksn' मान ली जाय वहा m' की गणना धातकीखंड द्वीप से आरम्भ हो तो, उपरिम समुद्र या द्वीप की खंडशलाकाओं की संख्या $(४ \times Ksn') + २(m'-१)(९६)$ होगी।

इसी गणना के आधार पर, ग्रंथकार ने, चौगुने से अतिरिक्त प्रमाण लाने के लिये गाथासूत्र कहा है, जो प्रतीक रूप से इस प्रक्षेप ९६ का मान निकालने के लिये निम्न लिखित रूप से प्रकृषित किया जा सकता है।

$$\text{प्रक्षेप } ९६ = \frac{Kns'}{Dn'} - १०००००$$

इस सूत्र में Ksn' उस द्वीप या समुद्र की खंडशलाकाएं हैं तथा Dn' विस्तार है।

गा. ५, २६३— लवण समुद्र की खंड शलाकाओं से धातकीखंड द्वीप की शलाकाएं $(१४४ - २४)$ या १२० अधिक हैं। कालोदधि की खंड शलाकाएं धातकीखंड तथा लवण समुद्र की शलाकाओं से $६७२ - (१४४ + २४)$ या ५०४ अधिक हैं। यह वृद्धि का प्रमाण $(१२०) \times ४ + २४$ लिखा जा सकता है। इसी प्रकार अगले द्वीप की इस वृद्धि का प्रमाण $\{(५०४) \times ४\} + (२ \times २४)$ है। इसलिये, यदि धातकीखंड से m' की गणना प्रारम्भ की जावे तो इष्ट m' वें द्वीप या समुद्र की खंड शलाकाओं की वर्णित वृद्धि का प्रमाण प्रतीक रूप से $\left\{ \left(\frac{Dn'}{१०००००} \right)^२ - १ \right\} \times ८$ होता है। यहां Dn' , n' वें द्वीप या समुद्र का विष्कारण है। यह प्रमाण उस समान्तरी गुणोत्तर (Arithmetico Geometric series) श्रेढि का n' वां पद है, जिसके उत्तरोत्तर पद पिछले पदों के चौगुने से क्रमशः $२४ \times २^{n'-१}$ अधिक होते हैं। यद्यपि इसे Arithmetico Geometric series कहा है तथापि यह आधुनिक वर्णित श्रेढियों से भिन्न है। Dn' स्वतः एक गुणोत्तर संकलन का निरूपण करता है जो ८ से प्रारम्भ होकर उत्तरोत्तर १६, ३२, ६४, १२८ आदि हैं। वृद्धि के प्रमाण को m' वा पद, मानकर बननेवाली श्रेढि अध्ययन योग्य है।

इस पद का साधन करने पर $\left\{ \frac{(Dn' + १०००००)(Dn' - १०००००)}{(१०००००)^२} \right\} \times ८$ प्रमाण प्राप्त होता है।

गा. ५, २६४ m' वें द्वीप या समुद्र से अवस्तन द्वीप समुद्रों की सम्मिलित खंड शलाकाओं के लिये ग्रंथकार ने निम्न लिखित सूत्र दिया है:—

ति. ग. १०

$$\text{उक्त प्रमाण} = \left[\frac{Dn'}{2} - 100000 \right] \times [Dn' - 100000] \div 1250000000$$

यहां n' की गणना धातकोखंड द्वीप से आरम्भ करना चाहिये। यह प्रमाण दूसरी तरह से भी प्राप्त किया जा सकता है। चूंकि यह, $Dn'a$ परिधि के अन्तर्गत क्षेत्रफल में, लम्बूद्वीप के क्षेत्रफल की राशि जैसी इतनी राशियां सम्मिलित होना दर्शाता है, इसलिये यह प्रमाण

$$\frac{\sqrt{10} \left[\frac{Dn'a}{2} \right]^2}{\sqrt{10} \left[\frac{100000}{2} \right]^2} \text{ भी होना चाहिये। इसी के आधार पर ग्रंथकार ने उपर्युक्त}$$

सूत्र निकाला होगा।

$$\text{गा. ५, २६५— अतिरिक्त प्रमाण } ७४४ = \frac{Ksn'}{Dn' \div 200000}$$

गा. ५, २६६— इस गाथा में ग्रंथकार ने बादर क्षेत्रफल निकालने के लिये π का मान ३ मान लिया है। इस आधार पर, द्वीप-समुद्रों के क्षेत्रफल निकालने के लिये ग्रंथकार ने सूत्र दिया है।

n वें द्वीप या समुद्र का क्षेत्रफल निकालने के लिये Dn विस्तार है तथा आयाम $(Dn - 100000)9$ है। इन दोनों का गुणनफल उक्त द्वीप या समुद्र का क्षेत्रफल होगा। यह दूसरी रीति से

$$2 \left[\left(\frac{Dnb}{2} \right)^2 - \left(\frac{Dna}{2} \right)^2 \right] \text{ होगा और इस प्रकार,}$$

$$9 Dn (Dn - 100000) = 2 \left[\left(\frac{Dnb}{2} \right)^2 - \left(\frac{Dna}{2} \right)^2 \right]$$

मान रखने पर, दोनों पक्ष समान सिद्ध किये जा सकते हैं। यहां π को ३ मानकर बादर क्षेत्रफल का कथन किया है।

गा. ५, २६७— उपर्युक्त आधार पर अधस्तन द्वीप या समुद्र के क्षेत्रफल से उपरिम द्वीप अथवा समुद्र के क्षेत्रफल की सातिरेकता का प्रमाण

$Dn \times 900000$ है। यहां n की गणना कालेदक समुद्र के उपरिम द्वीप से आरम्भ की गई है। यह, वास्तव में उत्तरोत्तर आयाम की वृद्धि का प्रमाण है।

गा. ५, २६८— n वें द्वीप या समुद्र से अधस्तन द्वीप-समुद्रों के पिंडफल को लाने के लिये गाथा को प्रतीक रूपेण इस प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है :—

अधस्तन द्वीप-समुद्रों का सम्मिलित पिंडफल =

$$[Dn - 100000] [9(Dn - 100000) - 900000] \div 2$$

यह दूसरी रीति से $2 \left(\frac{Dnb}{2} \right)^2$ आवेगा।

यदि उपर्युक्त मान रखे जावें तो ये दोनों समान प्राप्त होंगे।

गा. ५, २६९— यहां अतिरेक प्रमाण

$$2 \left\{ [2Dn - 200000] (200000) - 2 \left(\frac{100000}{2} \right)^2 \right\} \text{ है।}$$

गा. ५, २७१— अधस्तन सब समुद्रों का क्षेत्रफल निकालने के लिये गाथा दी गई है। चूंकि द्वीप ऊनी संख्या पर पड़ते हैं इसलिये हम इष्ट उपरिम द्वीप को $(2n - 1)$ वां मानते हैं। इस प्रकार, अधस्तन समस्त समुद्रों का क्षेत्रफल :

$$[D_{2n-1} - 200000] [1(D_{2n-1} - 100000) - 900000] \div 14$$

प्राप्त होता है। इस सूत्र की खोज वास्तव में प्रशंसनीय है।

गा. ५, २७२— वर्णित सातिरेक प्रमाण को प्रतीकरूप से निम्न लिखित रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है :—

$$\{ [Dna + Dnm + Dnb] 400000 \} - 10000000000$$

यहाँ n की गणना वारुणीवर समुद्र से आरम्भ होती है। इस प्रकार, वारुणीवर समुद्र से लेकर अवस्तन समुद्रों के क्षेत्रफल से उपरिम (आगे के) समुद्र का क्षेत्रफल पन्द्रहगुणे होने के सिवाय प्रक्षेप-भूत ४५५४०००००००००० योजना से चौगुणा होकर १६२००००००००००० योजना अधिक होता है।

गा. ५, २७३— अतिरेक प्रमाण प्रतीक रूपेण

$$(Dnm) \times 900000 + 270000000000 \text{ होता है।}$$

गा. ५, २७४— जब द्वीप का विष्कम्भ दिया गया हो, तब इच्छित द्वीप से (जम्बूद्वीप को छोड़कर) अवस्तन द्वीपों का सकलित क्षेत्रफल निकालने का सूत्र यह है :—

$$(D_{2n-1} - 100000) [(D_{2n-1} - 100000) 9 - 27000000] \div 14$$

यहाँ D_{2n-1} , $2n - 1$ वीं संख्या क्रम में आने वाले द्वीप का विस्तार है।

गा. ५, २७५— जब क्षीरवर द्वीप को आदि लिया जाय अथवा n की गणना इस द्वीप से आरम्भ की जाय तब वर्णित वृद्धि का प्रमाण सूत्र द्वारा यह होगा :—

$$(D_n''_{+2} - 100000) 9 \times 4000000$$

गा. ५, २७६— घातकीखंड द्वीप के पश्चात् वर्णित वृद्धियों त्रिसुथानों में होती हैं। जब n' की गणना घातकीखंड द्वीप से आरम्भ होती है; तब वर्णित वृद्धियों सूत्रानुसार ये हैं :—

$$\frac{Dn'}{2} \times 2; \quad \frac{Dn'}{2} \times 3; \quad \frac{Dn'}{2} \times 4$$

गा. ५, २७७— अवस्तन द्वीप या समुद्र से उपरिम द्वीप या समुद्र के आयाम में वृद्धि का प्रमाण प्राप्त करने के लिये सूत्र दिया गया है। यहाँ n' की गणना घातकी खंड द्वीप से आरम्भ होती है। प्रतीक रूप से आयाम वृद्धि $\frac{Dn'}{2} \times 900$ है।

गा. ५, २८०-८१— यहाँ से कायमार्गणा स्थान में जीवों की संख्या प्ररूपणा, यतिवृषभकालीन अथवा उनसे पूर्व प्रचलित प्रतीकत्व में दी गई है।

तेजस्कायिक राशि उत्पन्न करने के लिये निम्न लिखित विधि ग्रंथकार ने प्रस्तुत की है। इस रीति को स्पष्ट करने के लिये आंग्ल वर्ण अक्षरों से प्रतीक बनाये गये हैं।

सर्वप्रथम^१ एक घनलोक (अथवा ३४३ घन राज्ञु वरिमा) में जितने प्रदेश बिन्दु हैं, उस संख्या को Gl द्वारा निरूपित करते हैं। जब इस राशि को प्रथम बार वर्णित सम्बर्णित करते हैं तब $[Gl]^{Gl}$ राशि प्राप्त होती है।

१ गोम्मतसार जीवकांड गाथा २०३ की टीका में घनलोक से आरम्भ न कर केवल लोक से आरम्भ किया है। प्रतीत होता है कि घनलोक और लोक का अर्थ एक ही होगा। स्मरण रहे कि लोक का अर्थ असंख्यात प्रमाण प्रदेशों की गणात्मक संख्या है। मुख्य रूप से एक परमाणु द्वारा व्याप्त आकाश के प्रमाण के आधार पर प्रदेश की कल्पना से असंख्यात संलग्न प्रदेश कथंचित् अखंड लोकाकाश की संरचना करते हैं अथवा एक लोक में असंख्यात प्रदेश समाये हुए हैं। इस प्रमाण को लेकर कायमार्गणा स्थान में तेजस्कायिक जीवों की संख्या की प्राप्ति के लिये विधि का निरूपण किया गया है।

(शेष आगे पृ. ७६ पर देखिये)

यह क्रिया एक बार करने से अन्योन्य गुणकार शलाका का प्रमाण एक होता है। जितने बार यह वर्गन सम्बर्गन की क्रिया की जावेगी उतनी ही अन्योन्य गुणकार शलाकाओं का प्रमाण होगा। ग्रंथकार बतलाते हैं कि—

$\log_2 \log_2 [[GI]^{GI}] = \frac{\text{पर्योपम}}{\text{असंख्यात}}$ होता है। यहाँ सम्भवतः असंख्यात का प्रमाण आम होना चाहिए।

यदि $[GI]^{GI} = 2^k$ हो अथवा $\log_2 [(GI)^{GI}] = K$ हो तो K का प्रमाण असंख्यात लोक प्रमाण होता है। यहाँ न तो घन लोक का स्पष्टीकरण है और न लोक का ही।

इस तरह उत्पन्न राशि को भी असंख्यात लोक प्रमाण कहा गया है। इस महाराशि का वर्गन सम्बर्गन करने पर

$\{ (GI)^{GI} \}^{(GI)^{GI}}$ प्राप्त होता है। इस समय अन्योन्य गुणकार शलाकाओं का प्रमाण २ हो जाता है तथा राशि GI का वर्गन सम्बर्गन दो बार हो जाता है, इस प्रकार वर्णित रीति से GI का वर्गन सम्बर्गन GI बार करने पर मानलो L राशि उत्पन्न होती है। इस समय^१ अन्योन्य गुणकार शलाकाओं का प्रमाण घन लोक बिन्दुओं की संख्या अथवा GI के बराबर होता है। ग्रंथकार कहते हैं कि यह L राशि इस समय भी असंख्यात लोक प्रमाण रहती है।

इसके सिवाय $\log_2 \log_2 [L]$ भी असंख्यात लोक प्रमाण रहती है। यदि $L = 2^{K'}$ हो तो K' भी असंख्यात लोक प्रमाण रहती है।

अब वर्ग सम्बर्गन की क्रिया L राशि को लेकर प्रारम्भ करेंगे। इस राशि का प्रथम बार वर्गन सम्बर्गन किया तब $(L)^L$ राशि प्राप्त होती है तथा अन्योन्य गुणकार शलाकाओं की संख्या $GI + 1$ हो जाती है और ग्रंथकार कहते हैं कि $(L)^L$ उसकी वर्गशलाकायें तथा अर्द्धच्छेदशलाकाएँ तीनों ही राशियाँ इस समय भी असंख्यात लोक प्रमाण होती हैं। अब इस L राशि का दूसरी बार वर्गन सम्बर्गन किया तो

आगे चलकर, ग्रंथकार ने तेजस्कायिक राशि का प्रमाण $\equiv a$ किया है, जहाँ a का अर्थ असंख्यात हो सकता है। a का प्रयोग \equiv अथवा लोक के पश्चात् होना इस बात का सूचक है कि \equiv अथवा घनलोक से, तेजस्कायिक जीव राशि को उत्पन्न किया गया है जो द्रव्यप्रमाण की अपेक्षा से असंख्यात लोक प्रमाण बतलाई गई है। साथ ही असंख्यात लोक प्रमाण के लिये जो प्रतीक ९ दिया गया है वह $\equiv a$ से भिन्न है। यह ध्यान में रखना आवश्यक है कि असंख्यात शब्द से केवल किसी विशिष्ट संख्या का निरूपण नहीं होता, परन्तु अवधिज्ञानी के ज्ञान में आनेवाली उत्कृष्ट संख्यात के ऊपर की संख्याओं का प्ररूपण होता है। ९, प्रतीक ९ अंक से लिया गया प्रतीक है, जहाँ ३ का घन ९ होता है। ३ विमाओं (उत्तर दक्षिण, पूर्व पश्चिम, तथा ऊर्ध्व अधो भाग) में स्थित लोकाकाश जो जगश्रेणी के घन के तुल्य घनफलवाला है, ऐसे लोकाकाश को ९ लेना उपयुक्त प्रतीक होता है; पर, इस ९ प्रतीक को असंख्यात लोक प्रमाण गणात्मक संख्या का प्ररूपण करने के लिये उपयोग में लाया गया है।

१ ग्रंथकार ने यहाँ अन्योन्य गुणकार शलाकाओं का प्रमाण GI (घनलोक) न लेकर केवल लोक ही किया है जिससे प्रतीत होता है कि यहाँ लोक और घनलोक में कोई अंतर नहीं है।

$[(L)^L]^{(L)^L}$ राशि प्राप्त होगी और तब अन्योन्य शलाकाओं की संख्या $G1 + 2$ हो जावेगी तथा उत्पन्न महाराशि, उसकी वर्गशलाकाएँ तथा उसकी अर्द्धच्छेद-शलाकाएँ इस समय भी असंख्यात लोक प्रमाण रहती हैं।

ग्रंथकार कहते हैं कि दो कम उत्कृष्ट संख्यात लोक प्रमाण अन्योन्य गुणकार शलाकाओं के दो अधिक लोक प्रमाण अन्योन्य गुणकार शलाकाओं में प्रविष्ट होने पर चारों ही राशियाँ असंख्यात लोक प्रमाण हो जाती हैं। यह कथन असंख्यात की परिभाषा के अनुसार ठीक है।

क्योंकि दो कम उत्कृष्ट संख्यात लोक प्रमाण बार और वर्गन सम्बर्गन होने पर अन्योन्य गुणकार-शलाकाओं की संख्या $= G1 + 2 + [Su]G1 - 2$
 $= [Su + 1]G1$

तथा $Su + 1 = Apj$ अथवा जघन्य परीतासंख्यात हो जावेगी। इस प्रकार चारों राशियाँ, इतने बार के वर्गन सम्बर्गन से असंख्यात लोक प्रमाण हो जावेगी। यहाँ असंख्यात शब्द का उपयुक्त अर्थ लेना बांछनीय है।

इस प्रकार, जब L राशि का वर्गन सम्बर्गन L बार किया जावेगा तो अंत में मान लो M राशि उत्पन्न होगी। यहाँ स्पष्ट है कि M , M की वर्गशलाकाएँ तथा अर्द्धच्छेदशलाकाएँ और साथ ही अन्योन्य गुणकार शलाकाएँ ये चारों ही राशियाँ इस समय असंख्यात लोक प्रमाण होंगी।

इसी प्रकार M राशि को M बार वर्गित सम्बर्गित करने पर भी ये चारों राशियाँ अर्थात् उत्पन्न हुई (मान लो) राशि N , उसकी वर्गशलाकाएँ और अर्द्धच्छेदशलाकाएँ तथा अन्योन्य गुणकारशलाकाएँ ये सब ही इस समय भी असंख्यात लोक प्रमाण रहती हैं।

अब चौथी बार N राशि को स्थापित कर उसे $[N - M - L - G1]$ बार वर्गित सम्बर्गित करने पर तेजस्कायिक राशि उत्पन्न होती है जो असंख्यात वन लोक^१ प्रमाण होती है। ग्रंथकार ने इस तरह उत्पन्न हुई महाराशि को $\equiv a$ प्रतीक द्वारा निरूपित किया है। इस प्रकार तेजस्कायिक राशि की अन्योन्य गुणकार शलाकाएँ N हैं^२, क्योंकि, $N - (M + L + G1) + (M + L + G1) = N$ होता है।

ग्रंथकार ने “अतिक्रांत अन्योन्य गुणकार शलाकाओं” शब्द $M + L + G1$ के लिये व्यक्त किये हैं। यहाँ ग्रंथकार ने असंख्यात लोक प्रमाण के लिये ९ प्रतीक दिया है।

इस प्रकार, पृथ्वीकायिक राशि का प्रमाण $\left(\text{तेजस्कायिक राशि} + \frac{\text{ते. का. रा.}}{\text{असं. लोक}} \right)$ होता है।

अथवा, दक्षिण पक्ष का प्रमाण $\left(\equiv a + \frac{\equiv a}{9} \right)$ होता है।

१ घनलोक तथा लोक का अंतर सशयात्मक है, तथापि घनलोक लिखने का आशय हम पहिले बतला चुके हैं।

२ इसमें विषय में वीरसेनाचार्य ने कहा है कि कितने ही आचार्य चौथी बार स्थापित (N) शलाका राशि के आधे प्रमाण के ‘व्यतीत’ होने पर तेजस्कायिक जीवराशि का उत्पन्न होना मानते हैं तथा कितने ही आचार्य इस कथन को नहीं मानते हैं, क्योंकि, साढ़े तीन बार राशि का समुदाय वर्गधारा में उत्पन्न नहीं है। यहाँ वीरसेनाचार्य ने वर्गशलाकाओं तथा अर्द्धच्छेदशलाकाओं के प्रमाण के आधार पर अनेकान्त से दोनों मतों का एक ही आशय सिद्ध किया है और विरोध विहीन स्पष्टीकरण किया है जो षट्खंडागम में देखने योग्य है। षट्खंडागम, पुस्तक ३, पृष्ठ ३३७.

‘यह प्रमाण $\equiv a \frac{10}{9}$ अथवा $\left(\frac{10}{9} \text{ असंख्यात घन लोक}\right)$ ’ के तुल्य निरूपित किया गया है।

इसी प्रकार, जलकायिक राशि का प्रमाण प्रतीक रूपेण,^२

$$\left(\equiv a \frac{10}{9}\right) + \left(\equiv a \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9}\right) \text{ होता है।}$$

अथवा, यह $\equiv a \cdot \frac{10}{9} \left[1 + \frac{10}{9}\right]$ या $\equiv a \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9}$ है।

इसी प्रकार वायुकायिक राशि का प्रमाण;

$$\left(\equiv a \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9}\right) + \left(\equiv a \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9}\right) \text{ होता है।}$$

अथवा, यह $\equiv a \frac{10}{9} \frac{10}{9} \left[1 + \frac{10}{9}\right]$ या $\equiv a \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9}$ है। वहां,

१ यहां $1 + \frac{1}{\text{असंख्यात लोक}} = \frac{\text{असंख्यात लोक} + 1}{\text{असंख्यात लोक}}$ होना चाहिये पर ग्रंथकार ने (असंख्यात लोक + १) को (९ + १) न लिखकर १० लिख दिया है जो प्रतीक प्रतीत नहीं होता। आगे १० का बारंबार उपयोग हुआ है, इसलिये स्पष्ट हो जाता है कि वह (असंख्यात लोक + १) का प्ररूपण करने के लिये प्रतीकरूप में ले लिया गया है।

२ इस अध्याय में ग्रंथकार ने प्रतीकत्व के आधार पर परस्परगत ज्ञान का निर्देशन सरल विधि से स्पष्ट करने का अद्वितीय प्रयास किया है। गणितज्ञ इतिहासकार श्री वेल के ये शब्द यहां चरितार्थ होते प्रतीत होते हैं—“Extensive tracts of mathematics contain almost no symbolism, while equally extensive tracts of symbolism contain almost no mathematics.” यदि इस प्रतीकत्व को सुधार करने का प्रयास सतत रहता तो जैन गणित की उपेक्षा इस तरह न होती और विश्व की गणित के आधुनिक इतिहास में इसका भी नाम होता। वह केवल इतिहास की ही वस्तु न होकर अध्ययन का विषय होकर उत्तरोत्तर नवीन खोजों से भरी होती। गणित में प्रतीकत्व के विकास के इतिहास को देखने से ज्ञात होता है कि जैनाचार्यों ने कठिनता से अवधारणा में आनेवाली संख्याओं के निरूपण के लिये प्रतीकों का स्वतंत्र रूप से विकास किया। अन्य भारतीय गणितज्ञ भी उनके इस विकास से या तो अनभिज्ञ रहे या उन्होंने इसकी कोई कारणों वश उपेक्षा की। घन, ऋण, बराबर, भिन्न, भाग, गुणा आदि के चिह्नों का उपयोग इस ग्रंथ में नहीं मिलता है। परन्तु मरिचक के परे की संख्याओं या वस्तुओं के लिए भिन्न-भिन्न प्रतीक देकर और उन्हीं पर आधारित नई संख्याओं को निरूपित करने का प्रयास स्पष्ट है। इस समय तक घन के लिये घन, ऋण के लिये ऋण लिखा जाता था। बराबर और गुणा के लिये कोई चिह्न नहीं मिलता है। भिन्न ३ को ३ लिखा करते थे। भाग निरूपण के लिये भी कोई विशिष्ट चिह्न नहीं मिलता। वर्गमूल के लिये भी केवल ‘वर्गमूल’ लिखा जाता था। अर्द्धच्छेद के \log_2 सरोखा सरल कोई भी प्रतीक नहीं मिलता। वर्ग या कृति, इत्यादि शब्दों को शब्दों से निर्दिष्ट किया जाता था। यद्यपि, अभी तक अलौकिक गणित सम्बन्धी गणित ग्रंथ प्राप्त नहीं हो सका है जो क्रियात्मक प्रतीकत्व (Operational symbolism) के उपयोग का समर्थन कर सके, तथापि बीसेनाचार्यकाल में अर्द्धच्छेद तथा वर्गशलाकाओं के आधार पर विभिन्न द्रव्य प्रमाणों के अल्पवृद्धव का निर्दर्शन, बिना क्रियात्मक प्रतीकत्व के प्रायः असम्भव है।

१० पुनः (असंख्यात लोक + १) की निरूपणा करता है^१ ।

इसके पश्चात्, तेजस्कायिक वादर राशि का प्रमाण $\equiv \frac{a}{9}$ माना गया है तथा सूक्ष्म राशि का प्रमाण

$$\left(\equiv a \right) \text{ रिण } \left(\equiv \frac{a}{9} \right)$$

अर्थात् $\left(\equiv a \right) \left[१ \text{ रिण } \frac{१}{९} \right]$ अथवा

$\equiv a \left[\frac{\text{असंख्यात लोक रिण } १}{\text{असंख्यात लोक}} \right]$ माना गया है, जिसे ग्रंथकार ने प्रतीकरूपेण, $\equiv a \frac{८}{९}$ लिखा है ।

यहां (असंख्यात लोक रिण १) के लिये प्रतीक ८ दिया गया है ।

इसी प्रकार, वायुकायिक वादर राशि का प्रमाण $\equiv \frac{a}{९} \cdot \frac{१०}{९} \cdot \frac{१०}{९} \cdot \frac{१०}{९} \cdot \frac{१०}{९}$ है; तथा सूक्ष्म

राशि का प्रमाण $\equiv a \frac{१०}{९} \cdot \frac{१०}{९} \cdot \frac{१०}{९} \cdot \frac{८}{१}$ अथवा $\equiv a \frac{१०}{९} \cdot \frac{१०}{९} \cdot \frac{१०}{९} \cdot \frac{८}{९}$ है । यहां १०, (असंख्यात लोक + १) तथा ८, (असंख्यात लोक - १) का निरूपण करते हैं ।

अब, जलकायिक वादर पर्याप्त राशि का प्रमाण ग्रंथकार ने प्रतीक द्वारा $\equiv \frac{५}{४a}$ बतलाया है ।

यहां \equiv जगप्रतर है, ५ पश्योपम है, ४ प्रतरांगुल है और a असंख्यात का प्रतीक है । जब इस राशि में आवलि के असंख्यातवें भाग का भाग दिया जाता है, तो पृथ्वीकायिक वादर पर्याप्त जीवों की संख्या का प्रमाण मिलता है । जहां आवलि का असंख्यातवों भाग प्रतीक रूप से ग्रंथकार ने $\frac{१}{९}$ लिया है जिसका

अर्थ $\frac{१}{\text{असंख्यात लोक}}$ होता है (यह प्रमाण $\frac{१}{९}$ के स्थान में $\frac{\text{आवलि}}{\text{असंख्यात}}$ अथवा $\frac{\text{आवलि}}{a}$ लिखना चाहिये

या, पर वास्तव में यहाँ असंख्यात प्रमाण का अर्थ असंख्यात लोक ही है) जिसके लिये प्रतीक ९ है ।

इस प्रकार, पृथ्वीकायिक पर्याप्त वादर जीवराशि का प्रमाण ग्रंथकार ने प्रतीकरूपेण $\equiv \frac{५ \cdot ९}{४ a}$ दिया है ।

स्पष्ट है कि प्रतीक रूपेण निरूपण, अत्यन्त सरल, संक्षिप्त, युक्त एवं सुग्राह्य है ।

इसके पदचात्, तेजस्कायिक वादर पर्याप्त राशि का प्रमाण प्रतीक रूप से $\frac{८}{a}$ दिया गया है जहाँ

८ को आवलि का प्रतीक माना है ।

यह बतलाना आवश्यक है कि जब आवलि का प्रतीक ८ माना गया है तो आवलि के असंख्यातवें भाग को $\frac{८}{९}$ न लेकर $\frac{१}{९}$ क्यों लिया गया है ? इसके दो कारण हो सकते हैं । एक यह, कि असंख्यात लोक प्रमाण राशि (९) की तुलना में आवलि (जघन्य युक्त असंख्यात समथो की गणात्मक संख्या की

^१ यदि संख्या a है और इस संख्या को ९ द्वारा भाजित करने से जो लब्ध आवे वह इस a

संख्या में जोड़ना हो तो क्रिया इस प्रकार है :— $a + \frac{a}{९} = \frac{१० a}{९} = \frac{a १०}{९}$ । इसका ९वां भाग और

जोड़ने पर $a \frac{१०}{९} \times \frac{१०}{९}$ प्राप्त होता है ।

प्रतीक रूप राशि) और एक का अन्तर नगण्य है। दूसरा यह, कि ९ के साथ ८ का उपयोग करने पर कहीं उसका अर्थ (असंख्यात लोक-१) प्रमाण राशि न मान लिया जाय। इस प्रकार $\frac{=a \cdot 9}{8 \cdot a}$ (आवलि) लिखे जानेवाले प्रमाण में आवलि के स्थान पर ८ का उपयोग नहीं हुआ प्रतीत होता है।

गोम्मतसार जीवकाण्ड में गाथा २०९ में आवलि न लेकर घनावलि लिया गया है। घनावलि शब्द ठीक मालूम पड़ता है। आवलि यदि २ मानी जावे तब घनावलि की संदृष्टि ८ हो सकती है। परन्तु, यह इसलिये सम्भव नहीं है कि २ को सूत्र्यगुल का प्रतीक माना गया है।

स्मरण रहे कि उपर्युक्त प्रतीक रूप राशियों (Sets) का उल्लेख, उन राशियों में मुख्य रूप से आकाश में प्रदेशों की उपधारणा के आधार पर समाये जानेवाले प्रदेशों की गणात्मक संख्या बतलाने के लिये किया गया है।

आगे वायुकायिक बादर पर्याप्त राशि को ग्रंथकार ने प्रतीक रूप से $\frac{=}{\text{संख्यात}}$ लिखा गया है। यहाँ $\frac{=}{\text{संख्यात}}$ घन लोक की संदृष्टि प्रतीत होती है पर ग्रंथकार द्वारा वहाँ केवल लोक शब्द उपयोग में लाया गया है। संख्यात राशि के प्रतीक के लिये तिलोपपणत्ति भाग २, पृ. ६०२ देखिये। सुविधा के लिये हम आगे चलकर इसे Q द्वारा प्ररूपित करेंगे।

तदुपरान्त, पृथ्वीकायिक जीवों की 'सूक्ष्म पर्याप्त जीव राशि' तथा 'सूक्ष्म अपर्याप्त जीवराशि' के प्रमाण, क्रमशः, प्रतीक रूपेण $\frac{=a \cdot 10}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{4}$ तथा $\frac{=a \cdot 10}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{4}$ निरूपित किये गये हैं। प्रथम राशि को प्राप्त करने के लिये $\left(\frac{=a \cdot 10}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{4} \right)$ प्रमाण को अपने योग्यसंख्यात रूपों से खंडित करके उसका बहुभाग ग्रहण करना पड़ता है। दूसरी राशि उक्त प्रमाण का एक भाग रूप ग्रहण करने पर प्राप्त होती है। इसका कारण यह है कि अपर्याप्तक के काल से पर्याप्तक का काल संख्यातगुणा होता है। स्पष्ट है, कि पृथ्वीकायिक सूक्ष्मराशि का $\frac{2}{3}$ वां भाग पर्याप्त जीव राशि ली गई है तथा $\frac{1}{3}$ भाग अपर्याप्त जीव राशि ली गई है।

त्रसकायिक जीव राशि का प्रमाण प्रतीक रूपेण $\frac{=}{4} \cdot \frac{a}{2}$ लिखा गया है। गोम्मतसार जीवकाण्ड गाथा २११ के अनुसार ४ प्रतरांगुल है, = जगप्रतर है, २ आवलि है, तथा a असंख्यात है। इस प्रकार, आवलि के असंख्यातवै भाग $\left(\frac{2}{a} \right)$ से विभक्त प्रतरांगुल (४) का भाग जगप्रतर (=) में देने से $\frac{=}{4 \div \frac{2}{a}}$ प्रमाण राशि त्रस जीव राशि प्राप्त होती है।

इसके पश्चात् ग्रंथकार ने प्रतीक रूप से, सामान्य वनस्पतिकायिक जीव राशि का प्रमाण यह दिया है :—

$$\text{सर्व जीवराशि रिण} \left[\frac{=}{4} \cdot \frac{a}{2} \right] \text{ रिण} \left[\frac{=}{4} \left(\frac{=}{4} \right) \right]$$

अंतिम पद $\frac{=}{4} \left(\frac{=}{4} \right)$ समस्त तेजस्कायिक, पृथ्वीकायिक, वायुकायिक तथा जलकायिक राशियों के योग का प्रतीक है। ४ का अर्थ हम लः में से इन चारों कावों के जीव ले सकते हैं। शेष ० तथा — का निश्चित अर्थ कहने में अभी समर्थ नहीं हैं।

उपर्युक्त जीव राशि में से असंख्यात लोक प्रमाण राशि घटाने पर साधारण वनस्पतिकायिक जीव राशि उत्पन्न होती है। यथा :

(सर्व जीवराशि रिग = रिग $\equiv a \mid 4$) ऋग (असंख्यात लोक प्रमाण)

४
२
१

असंख्यात लोक के लिये १ सट्टि हो सकती है, पर वहा असंख्यात लोक प्रमाण से प्रत्येक वनस्पति

जीव राशिका आशय है। जिसका प्रमाण ग्रंथकार ने, आगे, $\equiv a \equiv a$ प्ररूपित किया है। शेष बचने-वाली सख्या के लिए ग्रंथकार ने $१३ \equiv$ प्रतीक दिया है। यह सट्टि किस आधार पर ली गई है, स्पष्ट नहीं है, तथापि १ और ४ अंकों के पान होने के कारण ली गई प्रतीत होती है। सम्भवतः १३ का स्पष्टीकरण पट्टद्वारागम पुस्तक ३ में पृष्ठ ३७२ आदि में वर्णित विवरण से हो सके।

इसके पश्चात्, नाधारण बादर वनस्पतिकायिक जीवराशि

$\frac{१३ \equiv}{१}$ द्वारा प्ररूपित की गई है जहाँ १ असंख्यात लोक का प्रतीक है। इस राशि को $१३ \equiv$

ने घटाने पर $१३ \equiv \frac{८}{१}$ प्रमाण राशि साधारण मृध्म वनस्पतिकायिक जीवराशि बतलाई गई है। यहाँ ८ का अर्थ, 'असंख्यात लोक रिग एग' है।

पुनः, साधारण बादर पर्याप्त वनस्पतिकायिक जीवराशि का प्रमाण प्रतीक रूपेण $\frac{१३ \equiv}{१} \cdot \frac{१}{७}$ लिया

है जहाँ ७ अपने योग्य असंख्यात लोक प्रमाण राशि को मान लिया गया है। इसे $\frac{१३ \equiv}{१}$ से घटाने पर प्रतीक रूपेण साधारण बादर अपर्याप्त जीव राशि $\frac{१३ \equiv}{१} \cdot \frac{६}{७}$ प्ररूपित की गई है। इस प्रकार अपने योग्य असंख्यात लोक प्रमाण राशि में से एक घटाने पर जो राशि प्राप्त होती है, उसे ६ द्वारा निरूपित किया गया है।

पुनः, $१३ \equiv$ के का ६ वा भाग साधारण मृध्म वनस्पतिकायिक पर्याप्त जीवराशि तथा ६ वा भाग अपर्याप्त जीवराशि का प्रमाण बनलाया गया है।

असंख्यात लोक प्रमाण राशि जो $\equiv a \equiv a$ ली गई थी, वह प्रत्येकद्वारी वनस्पति जीवों का प्रमाण भी है।

आगे, ग्रंथकार ने अप्रतिष्ठित प्रत्येकद्वारी वनस्पतिकायिक जीवराशि को असंख्यात लोक परिमाण बतलाकर $\equiv a$ प्रतीक रूपेण प्ररूपित किया है। इसमें जब असंख्यात लोकों का गुणा करते हैं तब प्रतिष्ठित जीवराशि का प्रमाण $\equiv a \equiv a$ प्राप्त होता है।

बादर निगोदप्रतिष्ठित प्रत्येकद्वारी वनस्पतिकायिक पर्याप्त जीवराशि का प्रमाण : पृ. का. वा.

प. जीवराशि $\div \frac{\text{आवलि}}{\text{असंख्यात}}$ है। यहाँ ग्रंथकार ने फिर से $\frac{\text{आवलि}}{\text{असंख्यात}}$ को $\frac{२}{६}$ नहीं लिया वरन् $\frac{१}{९}$ अथवा

$\frac{१}{९}$ असंख्यात लोक प्रमाण लिया है। इसलिये प्रमाण $\frac{= ५९}{४६} \cdot \frac{१}{१}$ आता है। आगे, बादर निगोदप्रतिष्ठित प्रत्येकद्वारी वनस्पतिकायिक अपर्याप्त जीवराशि तक का वर्णन तथा प्रतीक स्पष्ट है।

इसके बाद, ग्रंथकार ने प्रतीकरूपेण दोइंद्रिय, तीनइंद्रिय, चतुरिंद्रिय तथा पंचेन्द्रिय जीवों के प्रमाण मूल गायी में प्रदर्शित किये हैं जो क्रमशः

$$\begin{aligned} &= \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{८४२४}{६५६१}, \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{६१२०}{६५६१}; \\ &= \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{५८६४}{६५६१} \text{ तथा } \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{६१२०}{६५६१} \text{ हैं।} \end{aligned}$$

जहां = जगप्रतर है, ४ प्रतरांगुल है, २ आवलि है, तथा ६ असंख्यात का प्रतीक है। इन राशियों की प्राप्ति क्रमशः निम्न रीति से स्पष्ट हो जावेगी।

$$= \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \text{ अलग स्थापित करते हैं तथा,}$$

$$= \frac{२}{४} \cdot \frac{८}{६} \cdot \frac{१}{४}, \text{ चार जगह अलग २ स्थापित करते हैं।}$$

दो इंद्रिय जीवों का प्रमाण निकालने के लिये $\frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{१}{९}$ में $\frac{१}{९}$ का गुणा करने से प्राप्त राशि को $\frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{१}{९}$ में से घटा देने पर अवशिष्ट $\frac{२}{४} \cdot \frac{८}{६} \cdot \frac{१}{९}$ राशि बचती है जिसे अलग स्थापित किये प्रथम पुंज में मिलाने पर

$$\begin{aligned} &= \frac{२}{४} \cdot \frac{८}{६} \cdot \frac{१}{९} + \frac{२}{४} \cdot \frac{८}{६} \cdot \frac{१}{९} \\ \text{अथवा } &= \frac{२}{४} \cdot \frac{८}{६} \cdot \frac{८१}{९} + \frac{२}{४} \cdot \frac{८}{६} \cdot \frac{१}{९} \cdot \frac{८१}{९} \\ \text{अथवा } &= \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{(८ \times ४ \times ८१) + (८ \times ८१ \times ९)}{८१ \times ८१} \\ \text{अथवा } &= \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{८४२४}{६५६१} \text{ प्रमाण राशि प्राप्त होती है।} \end{aligned}$$

तीन इंद्रिय जीवों का प्रमाण प्राप्त करने की निम्न लिखित रीति है।

$$\begin{aligned} &= \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{१}{९} \times \frac{१}{९} \text{ को } \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{१}{९} \text{ में से घटाते हैं जिससे} \\ &= \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{१}{९} \text{ रिण } \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{१}{९} \text{ प्रमाण राशि} \end{aligned}$$

अथवा $\frac{२}{४} \cdot \frac{८}{६} \cdot \frac{१}{९}$ प्रमाण राशि प्राप्त होती है। इस अवशिष्ट राशि के समान खंड करने

$$\text{पर } \frac{२}{४} \cdot \frac{८}{६} \cdot \frac{१}{९} \times \frac{१}{९} \text{ प्रमाण प्राप्त होता है।}$$

इसे द्वितीय पुंज में मिलाने पर

$$= \frac{२}{४} \cdot \frac{८}{६} \cdot \frac{१}{९} \times \frac{१}{९} + \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{८}{६} \cdot \frac{१}{९} \times \frac{(९)^3}{(९)^3}$$

$$\text{अथवा } \frac{२}{४} \cdot \frac{१}{६} \cdot \frac{६१२०}{६५६१} \text{ प्रमाण प्राप्त होता है।}$$

उपर्युक्त क्रियाएं प्रतीक ९ को अंक मानकर की गई हैं। ये कहां तक ठीक हैं कहा नहीं जा सकता। ९ को अंक सम्भवतः इसलिये मान लिया गया हो कि १ का विरलन किया गया है।

इसी प्रकार, चार इंड्रिय जीवों का प्रमाण—

$$= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$$

अथवा $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$ बतलाया गया है।

इसी तरह पाचइन्द्रिय जीवों का प्रमाण—

$$= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$$

अथवा $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$ बतलाया गया है।

पर्याप्त जीवों की संख्या निकालने के लिये उपर्युक्त रीति में $\frac{2}{8}$ के बदले केवल संख्यात ५ लेते हैं, जिससे उल्लेखित प्रमाण प्राप्त हो जाता है।

दोईन्द्रिय अपर्याप्त जीवों की राशि को ग्रंथकार ने वास्तव में निम्न प्रकार निरूपित किया है :—

$$= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \text{ रिण } = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$$

अंतिम दो स्थापनाओं में कुछ ऐसे प्रतीक हैं जिनका अर्थ इस समय प्राप्त सामग्री से ग्राह्य नहीं है। ये क्रमशः μ , α , Ω , हैं। α तो ग्रीक अक्षर सिगमा तथा Ω ग्रीक अक्षर ओमेगा तथा ९ रो के समान और δ एल्फा के समान प्रतीत होता है। यद्यपि ९, ९ अंक से लिया गया प्रतीत होता है और δ असंख्यात का प्ररूपण करता है, तथापि α और Ω के विषय में खोज आवश्यक है, क्योंकि ये वर्णाक्षर विभिन्न युगों में यूनान में पूर्वीय देशों से प्रविष्ट हुए^१।

गा. ५, ३१४-१५— अन्तर ब्रह्मत्व (Comparability) :—

यहां पंचेन्द्रिय त्रियेच सञ्जी अपर्याप्त राशि निष्पत्ति का प्ररूपण $\frac{(=)}{8} \cdot \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$ है।
बादर तेज्जकायिक पर्याप्त जीवराशि

४ प्रतरागुल है, ८ घनावलि है, तथा δ असंख्यात है।

यह प्रमाण $\frac{(=) \delta}{8 \times 4 \times 8 \times 8 \times 8 \times 4 \times 4}$ होता है। इस राशि को ग्रंथकार ने असंख्यात विभाग में रखा है। यह स्पष्ट भी है, क्योंकि, जगप्रतर का प्रमाण असंख्यात और δ का प्रमाण भी असंख्यात है। सञ्जी पर्याप्त, असञ्जी पर्याप्त से संख्यात अथवा ४ गुने हैं।

तीन इन्द्रिय असञ्जी अपर्याप्त राशि, तीन इन्द्रिय पर्याप्त राशि से असंख्यातगुणी है। यह प्रमाण आवलि के प्रमाण पर निर्भर है।

इसी प्रकार, दोईन्द्रिय अपर्याप्त जीवराशि से असंख्यातगुणी अप्रतिष्ठित प्रत्येक जीवराशि है जो पल्य के प्रमाण पर निर्भर है।

जलकायिक बादर पर्याप्त जीव $\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{8}$ हैं तथा बादर वायुकायिक पर्याप्त जीव $\frac{5}{8}$ हैं।

^१ Heath, A History of Greek Mathematics, vol. 1, pp 31-33 Edn. 1921.

$$\text{इसलिये, } \frac{\equiv / Q}{\equiv p} \text{ अथवा } \frac{\equiv \vee a}{\equiv Q \cdot p}$$

निष्पत्ति (ratio) को ग्रंथकार ने असंख्यात प्रमाण कहा है। यहाँ प्रतीक टाइप के अभाव में हम संख्यात के लिये Q द्वारा प्ररूपित कर रहे हैं। सदृष्टि के लिये ति.प. भाग २ पृ. ६१६-६१७ देखिये।

इसके पश्चात्, ग्रंथकार ने तेजस्कायिक सूक्ष्म अपर्याप्त जीवराशि और वायुकायिक बादर अपर्याप्त जीवराशि को असंख्यात कहा है।

निरूपण यह है :—

$$\left\{ \frac{\equiv a \cdot c}{9 \cdot 4} \right\} / \left\{ \frac{\equiv a \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9} \text{ रिण } \frac{\equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{Q \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \right\}$$

अथवा

$$\frac{\equiv a \cdot c \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot Q}{9 \cdot 4 \cdot [\equiv a \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \text{रिण } \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1]}$$

स्पष्ट है, कि यह राशि असंख्यात है। यहाँ बिंदु का उपयोग गुणन के लिये हुआ है।

इसके पश्चात्, ग्रंथकार ने साधारण बादर पर्याप्त और वायुकायिक सूक्ष्म पर्याप्त की निष्पत्ति को भी असंख्यात विभाग में रखा है। यथा :— $13 \equiv \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} / \equiv a \cdot \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4}$

$$\text{अथवा } \frac{(13) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4}{9 \cdot 10 \cdot a \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4}$$

इससे शत होता है कि $\frac{13}{a}$ की निष्पत्ति अवश्य ही असंख्यात होना चाहिये। अर्थात् १३ प्रतीक द्वारा प्ररूपित राशि (a)² के समान अथवा उससे बड़ी होना चाहिये।

साधारण बादर अपर्याप्त और साधारण बादर पर्याप्त की निष्पत्ति असंख्यात प्रमाण कही गई है। यथा :—

$\frac{13 \equiv 6}{8} / \frac{13 \equiv 1}{9}$, जो वास्तव में केवल संख्यातगुणी प्रतीत होती है। पर यह निष्पत्ति ६ के प्रमाण पर निर्भर है। यदि ६ को घनांगुल मान लिया जाय, तो उसमें प्रदेशों की संख्या असंख्यात मानकर यह निष्पत्ति असंख्यात मानी जा सकती है।

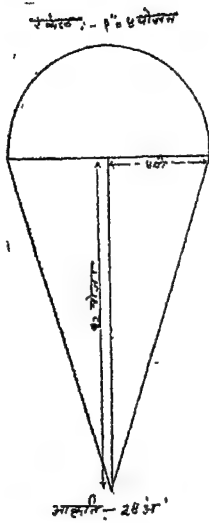
आगे ग्रंथकार ने सूक्ष्म अपर्याप्त और साधारण बादर अपर्याप्त की निष्पत्ति अनन्त मानी है। यथा :—

$$\frac{13 \equiv 1}{9 \times 4} / \frac{13 \equiv 6}{9 \cdot 10} \quad \text{अथवा} \quad \frac{1 \times 10}{4 \times 6}$$

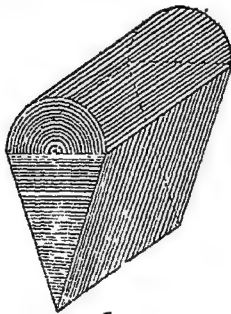
ऐसा प्रतीत होता है कि इस निष्पत्ति को उपचार से अनन्त कहा गया है। इस समय कहा नहीं जा सकता कि ८, ६, ७ और ५ को यहाँ किन अर्थों में ग्रहण किया गया है।

गा. ४, ३१८— अवगाहनाओं के विकल्प का कथन, घबला टीका के गणित का अनुसंधान करते समय, सुगमता से सम्भव हो सकेगा।

गा. ५, ३१९-२०— यहाँ, सम्भवतः ग्रंथकार ने निम्न लिखित सांद्र के घनफल का प्ररूपण किया है। यह एक ऐसा उद्गम रम्भ है, जिसका आधार, समद्विबाहु त्रिभुज सहित अर्धवृत्त है। आधार बांछ आकृति कहा जा सकता है।



रज्जु, - ४८.०० = १२०



आकृति २४ अ



आकृति - २४ अ

इस शंखाकार आकृति (३४ अ) का क्षेत्रफल $\frac{\pi (r)^2}{2} + 4\pi = 63.28$ वर्ग योजन प्राप्त होता है। यदि रज्जु का उत्तरेध ५ योजन हो, तो घनफल, आधार का क्षेत्रफल तथा उत्तरेध का गुणनफल, होता है।

इसलिये, यहा घनफल

$$63.28 \times 5$$

अथवा बादरूपेण ३१६ घनयोजन प्राप्त होगा। हो सकता है कि ग्रंथकार द्वारा निर्दिष्ट आकृति की नियोजना दूसरी रही हो। ऐसे क्षेत्र के क्षेत्रफल का सूत्र ग्रंथकार ने दिया है:-

$$\left[(\text{विस्तार})^2 - \left(\frac{\text{मुख}}{2}\right) + \left(\frac{\text{मुख}}{2}\right)^2 \right] \times \frac{2}{3}$$

इसे शंखक्षेत्र का गणित कहा गया है।

यहां, विस्तार १२ योजन एवं मुख ४ योजन है।

यह आकृति सम्भवतः चित्र ३४ व में बतलाये हुए सांद्र के सदृश हो सकती है।

आगे, पद्म के आकार के सांद्र का घनफल निकालने के लिये सूत्र दिया गया है। यह सांद्र वेलनाकार होता है। इसका घनफल निकालने के लिये आधुनिक सूत्र $\pi. r^2. h$ का उपयोग किया गया है, जहा π का मान ३ लिया गया है, २१ अथवा व्यास १ योजन है तथा उत्तरेध १०००३ योजन है। आकृति—३४ स देखिये।

महामत्स्य की अवगाहना, आयतज (cuboid) के आकार का क्षेत्र है, जहा घनफल (लम्बाई \times चौड़ाई \times ऊँचाई) होता है।

स्केल: १८००० = १८०००



आकृति २४

अमरक्षेत्र का घनफल निकालने के लिये बीच से विदीर्ण किये गये अर्द्ध बेलन के घनफल को निकालने के लिये उपयोग में लाया गया सूत्र दिशा गया है।

सूत्र में π का मान ३ लिया गया है। आकृति—२४ द देखिये।

गा. ७, ५-६— ज्योतिषी देवों का निवास जंबूद्वीप के बहुमध्य भाग में प्रायः १३ अरब योजन के भीतर नहीं है। उनकी बाहरी चरम सीमा = $\times ११०$ योजन दी गई है। यह बाह्य सीमा एक

राज्य से अधिक ज्ञात होती है। जहाँ बाह्य सीमा १ राज्य से अधिक है उस प्रदेश को अगम्य कहा गया है। ज्योतिषियों का निवास शेष गम्य क्षेत्र में माना गया है।

गा. ७, ७— चन्द्र, सूर्य, ग्रह, नक्षत्र और प्रकीर्णक तारे, ये सब ग्रंथकर्ता के अभिप्रायानुसार अंत में घनोदधि वातवलय (वायु और पानी की वाष्प से मिश्रित वायुमंडल) को स्पर्श करते हैं। तदनुसार, इन समस्त देवों के आसपास किसी न किसी तरह के वायुमंडल का उपस्थित होना माना गया है।

गा. ७, ८— पूर्व पश्चिम की अपेक्षा से उत्तर दक्षिण में स्थित ज्योतिषी देव घनोदधि वातवलय को स्पर्श नहीं करते। (!)

गा. ७, १३-१४— इन गाथाओं में फिर से प्रतीक ४ तथा संख्यात के लिये Q (यथार्थ प्रतीक मूल ग्रन्थ में देखिये) लिया गया है।

१ इस महाधिकार में ग्रंथकार ने ज्योतिष का बृहत् प्ररूपण नहीं किया है किन्तु रूपरेखा देकर कुछ ही महत्त्वपूर्ण फलों का निर्देशन किया है। ज्योतिषों के विज्ञान का अस्तित्व भारत, बेबीलोन, मिश्र और मध्य अमेरिका में ईसा से ५००० से ४००० वर्ष पूर्व तक पाया जाता है। आकाश के पिंडों की स्थिति और अन्य घटनाओं के समय की गणनाएँ तत्कालीन साधारण यंत्रों पर आधारित थीं।

प्राचीन काल में, ग्रहणों का समय, एकत्रित किये गये पिछले अभिलेखों के आधार पर बतलाया जाता था। पर ग्रहण, बहुधा, बतलाये हुए समय पर घटित न होकर कुछ समय पहिले या उपरांत हुआ करते थे। इस प्रकार वादरूप से प्राप्त उनके सूत्र प्रशंसनीय तो थे, पर उनमें सुधार न हो सके। जब मिलेशस के थेल्स (ग्रीस का विद्वान) ने ईसा से प्रायः ६०० वर्ष पूर्व प्रयोग द्वारा बतलाया कि चंद्रमा पृथ्वी की तरह प्रकाशहीन पिंड है और जो प्रकाश हमें दिखाई देता है वह सूर्य का परावर्तित प्रकाश है तब ग्रहण का कारण चंद्र का सूर्य और पृथ्वी के बीच आना और पृथ्वी का सूर्य और चंद्र के बीच आना माना जाने लगा। सर्वप्रथम, ग्रीस के निवासियों ने पृथ्वी को गोल बतलाया; क्योंकि जो नक्षत्र उन्हें उत्तर में दिखाई देते थे, उनके बदले में दक्षिण दिशा में दूर तक यात्रा करने में उन्हें नये नक्षत्र दिखाई पड़े। साथ ही, चंद्रग्रहण के समय पृथ्वी की छाया सूर्य पर वृत्ताकार दिखाई दी। यहाँ तक कि इरेटोस्थनीज (ईसा से २७६-१९६ वर्ष पूर्व) ने इसके आधार पर पृथ्वी की त्रिज्या भी गणना के आधार पर प्रायः ४००० मील से कुछ कम निश्चित कर दी।

गा. ७, ३६— पृथ्वीतल से चंद्रमा की लेंचाई ८८० योजन बतलाई गई है। एक योजन का माप आधुनिक ४५४५ मील लेने पर चंद्रमा की दूरी ८८० × ४५४५ अथवा ३७,९३६०० मील प्राप्त होती है। आधुनिक सिद्धान्तों के अनुसार वैज्ञानिकों ने चंद्रमा की दूरी प्रायः २,३८००० मील निश्चित की है।

गा. ७, ३६-३७— वहाँ आधुनिक वैज्ञानिकों ने चंद्रमा को स्वप्रकाशित नहीं माना है, वहाँ ग्रंथकार के अनुसार चंद्रमा को स्वयं प्रकाशवान मानकर उसे शीतल चारह हजार किरणों सहित बतलाया है। न केवल वहाँ की पृथ्वी ही, वरन् वहाँ के जीव भी उद्योत नामकर्म के उदय से संयुक्त होने के कारण स्वप्रकाशित कहे गये हैं।

गा. ७, ३९— ग्रंथकार के वर्णन के अनुसार जैन मान्यता में चंद्रमा अर्द्धगोलक (Hemispherical) है। उस अर्द्ध गोलक की त्रिज्या ३६ योजन मानी गई है अर्थात् व्यास प्रायः $२(\frac{३६}{२}) \times ४५४५ =$ प्रायः ४१७२ मील माना गया है आधुनिक ज्योतिषविज्ञों ने अपने सिद्धान्तानुसार इस प्रमाण को प्रायः २९६३ मील निश्चित किया है। इस प्रकार ग्रंथकार के दत्त विन्यासानुसार यदि अवलोकनकर्ता की आंख पर चंद्रमा के व्यास द्वारा आपतित कोण निकाला जाय तो वह $\frac{४६}{६१ \times ८८०}$ रेडियन अथवा ३.५९ कला (3.59 minutes) होगा। आधुनिक यंत्रों से चंद्रमा के व्यास द्वारा आपतित कोण प्रायः ३१ कला (31'7") प्राप्त हुआ है। यह माप या तो प्रकाश के किसी विशेष अज्ञात सिद्धान्तानुसार हमें यंत्रों द्वारा गलत प्राप्त हो रहा है अथवा ग्रंथकार द्वारा दिये गये माप में कोई त्रुटि है।

यहाँ एक विशेष बात उल्लेखनीय यह है कि जैन मान्यतानुसार अर्द्धगोलक ऊर्ध्वमुख रूप से अवस्थित है जिससे हम चंद्रमा का केवल निम्न भाग (अर्द्ध भाग) ही देखने में समर्थ हैं। इसी बात का आधुनिक वैज्ञानिकों ने पुष्टि की है कि चंद्रमा का सर्वदा केवल एक ही ओर वही अर्द्ध भाग हमारी ओर होता है और इस तरह हम चंद्रमा के तल का केवल ५९% भाग (कुछ और विशेष कारणों से) देखने में समर्थ हैं। वेधयंत्रों से प्राप्त अवलोकनों के आधार पर कुछ खगोलशास्त्रियों का अभिमत है कि मंगल आदि ग्रहों के भी केवल अर्द्ध विशिष्ट भाग पृथ्वी की ओर सतत रहते हैं। इसका कारण, उनका अधीय परिभ्रमण उपचारित किया गया है।

गा. ७, ६५— इसके पश्चात्, ग्रंथकार ने सूर्य की लेंचाई चंद्रमा से ८० योजन कम अथवा ८०० योजन (आधुनिक $८०० \times ४५४५ = ३६३६०००$ मील) बतलाई है। आधुनिक वैज्ञानिकों ने सूर्य की दूरी प्रायः ९२, ७००.००० मील निश्चित की है।

इससे प्रायः चार सौ वर्ष पूर्व ग्रीक विद्वानों ने आकाश पिंडों के दैनिक परिभ्रमण का कारण पृथ्वी का स्वतः को अक्ष पर परिभ्रमण सोचा। पर, एरिस्टाटिल (ईसा से ३८४-३२२ वर्ष पूर्व) ने पृथ्वी को केन्द्र मानकर शेष चंद्र, सूर्य तथा ग्रहों का परिभ्रमण क्लिष्ट रीति द्वारा निश्चित किया। यह ज्ञान अपना प्रमाय २००० वर्ष तक जमाये रहा। इसके विरुद्ध पोलैण्ड के कापरनिकस (१४७३-१५४३) ने सम्पूर्ण जीवन के परिभ्रम के पश्चात् सूर्य को मध्य में निश्चित कर शेष ग्रहों का उसके परितः परिभ्रमण-शील निश्चित किया। सूर्य से उनकी दूरियां भी निश्चित कीं। इसके पश्चात्, प्रसिद्ध ज्योतिषशास्त्री ज्ञान केपलर (१५७१-१६३०) ने ग्रहों के पथों को ऊर्ध्वनिश्चित किया तथा सूर्य को उनकी नाभि पर स्थित बतलाया। उसने यह भी निश्चित किया कि ग्रह से सूर्य को जोड़नेवाली त्रिज्या समान समयमें समान क्षेत्रों (areas) को तय करती है; और यह कि किसी ग्रह के आवर्त काल के अंतराल के वर्ग (square of the periodic time) और उसकी सूर्य से माध्य दूरी (mean distance) के घन, की नियति निश्चल रहती है। दूरवीन ने भी वृहस्पति और शनि आदि ग्रहों के उपग्रहों को खोजने में सहायता की। सन् १६८७ में न्यूटन ने विश्वको ज्ञान केपलर के फल

गा. ७, ६६— जैन मान्यतानुसार, सूर्य को प्रकाशवान तथा १२००० उष्णतर किरणों से संयुक्त माना है। उसमें जीवों का रहना निश्चित किया है तथा उन्हें भी स्वतः प्रकाशित बतलाया है।

गा. ७, ६८— सूर्य को भी चंद्रमा की तरह अर्द्ध गोलक बतलाया गया है, जहां उसका विस्तार $\frac{1}{2}$ योजन अथवा $\frac{1}{2} \times ४५४५ =$ प्रायः ३५७६ मील निश्चित किया गया है। वैज्ञानिकों ने व्यास का प्रमाण ८६४,००० मील निश्चित किया है।

अवलोकनकर्ता की आंख पर जैन मान्यतानुसार दत्त विन्यास के आधार पर सूर्य का व्यास $\frac{1}{2} \times ४५४५$ रेडियन अथवा ३३८ कला (338 minutes) आपतित करेगा। पर, आधुनिक ग्रंथों द्वारा इस कोण का मध्य मान प्रायः ३२ कला (32 minutes) निश्चित किया गया है।

गा. ७, ८३— बुध ग्रह की ऊँचाई पृथ्वीतल से लम्बरूप ८८८ योजन अथवा ४०,३५,९६० मील बतलाई गई है। आधुनिक वैज्ञानिकों ने अपने सिद्धांतों के आधार पर इस दूरी को प्रायः ४६,९२९,२१० मील निश्चित किया है। इन्हें भी ग्रंथकार ने अर्द्ध गोलक कहा है।

गा. ७, ८९— शुक्र ग्रहों की ऊँचाई पृथ्वीतल से लम्बरूप ८९१ योजन अथवा ४,०४९,५९५ मील बतलाई गई है। आधुनिक वैज्ञानिकों ने यह दूरी २५,६९८,३०८ मील निश्चित की है। इन नगर तलों की किरणों की संख्या २५०० बतलाई गई है।

गा. ७, ९३— वृहस्पति ग्रहों की ऊँचाई पृथ्वीतल से लम्बरूप ८९४ योजन अथवा ४,०६३,२३० मील बतलाई गई है। आधुनिक वैज्ञानिकों ने यह दूरी ३९०,३७६,८९२ मील निश्चित की है।

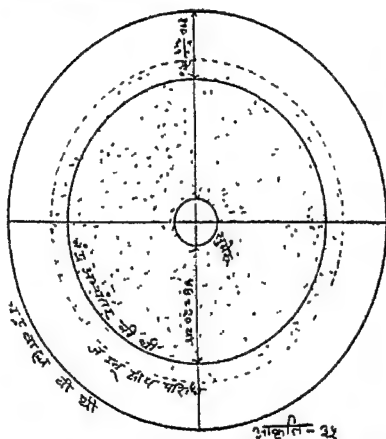
गा. ७, ९६— मंगल ग्रहों की ऊँचाई पृथ्वीतल से लम्बरूप ८९७ योजन अथवा ४०,७६,८६५ मील बतलाई गई है। आधुनिक वैज्ञानिकों ने यह दूरी ४८,६४३,०३८ मील निश्चित की है।

गा. ७, ९९— शनि ग्रहों की ऊँचाई पृथ्वीतल से लम्बरूप ९०० योजन अथवा ४०,९०,५०० मील बतलाई गई है। आधुनिक सिद्धान्तों पर यह दूरी ७९३,१२९,४१० मील निश्चित की गई है।

गा. ७, १०४-१०८— इसी प्रकार, नक्षत्रों की ऊँचाई ८८४ योजन तथा अन्य तारागणों की ऊँचाई ७९० योजन है। आधुनिक वैज्ञानिकों ने ताराओं को सूर्य सदृश प्रकाश का पुंज माना है। सबसे पास के तारे Alpha Centauri की दूरी उन्होंने सूर्य की दूरी से २२४,००० गुनी मानी है। अन्य तारों की दूरी तुलना में अत्यधिक है।

के आधार पर गुरुत्वाकर्षण शक्ति का एक महान् नियम दिया। इसी शक्ति के आधार पर ज्वार और भाटे की घटनाओं को समझाया गया। सन् १८४५ के पश्चात् तीन नवीन ग्रहों यूरेनस, नेपच्यून और प्लूटो का गुरुत्वाकर्षण शक्ति पर आधारित प्रवैगिकी तथा दूरबीन की सहायता से आविष्कार हुआ। दूरबीन के सिवाय, वितन्तु दूरबीन तथा सूर्यरश्मिविश्लेषण और फोटोग्राफी आदि से अब आकाश के पिंडों की बनावट, उनके वायुमंडल, उनकी गति आदि के विषय में निश्चिन रूप से आश्चर्यजनक एवं महत्वपूर्ण बातें बतलाई जा सकती हैं। वैज्ञानिकों ने पृथ्वी का वायुमंडल केवल प्रायः २०० मील की ऊँचाई तक निश्चित किया है। सूर्य, चंद्र और ग्रहों के विषय में तो उनकी जानकारी एक चरम सीमा तक पहुँच चुकी है। चंद्रकलाओं का कारण प्रकाशहीन चंद्र का सूर्य से प्रकाश प्राप्त होना तथा चंद्र का विशेष रूप से गमन करना बतलाया गया है। सूर्य में उपस्थित काले धब्बों का आवर्तीय समय में दृष्टिगोचर होना भी सूर्य का विशेष रूप से गमन तथा उसी में उपस्थित विशेष तत्वों को बतलाया गया है। यह कहने की आवश्यकता नहीं कि अब सूर्य और चंद्र ग्रहण का बिल्कुल ठीक समय गणना द्वारा निकाला जाता है। सूर्य के स्वपरिभ्रमण को सूर्यरश्मिविश्लेषण या रंगावलोक्य यंत्र द्वारा डाब्लर के सिद्धान्त का उपयोग कर परिपुष्ट किया गया है। इनके सिवाय, चर्चों में

गा. ७, ११७ आदि— जितने वलयाकार क्षेत्र में चंद्रबिम्ब का गमन होता है उसका विस्तार ५१०५६६ योजन है। इसमें से वह १८० योजन जम्बूद्वीप में तथा ३३०५६६ योजन लवण समुद्र में रहता है। आकृति— ३५ देखिये।



चित्र का माप प्रमाण नहीं है :—
विन्दुओं के द्वारा दर्शाई गई परिधि जम्बूद्वीप की है जिसका विस्तार १००००० योजन है। मध्य में सुमेरु पर्वत है जिसका विस्तार १०००० योजन है। चंद्रो के चार क्षेत्र में पंद्रह गलियां हैं जिनमें प्रत्येक का विस्तार ५६६ योजन है, क्योंकि उन्हीं में से केवल चंद्रमा का गमन होता है। चूंकि यह गमन एकसा होना चाहिये अर्थात् चंद्र का हटाव अकस्मात् (प्रायः ४८ घंटे के पश्चात्) एक बीथी से दूसरी बीथी में न होकर प्रतिसमय एकसा होना चाहिये, इसलिये चंद्र का पथ समापन (winding) और असमापन (unwinding) कुंतल (spiral) होना चाहिये।

एक-एक बीथी का अंतराल ३५३३३३ योजन अथवा [प्रायः ३५३ × ४५४५ मील], १६१३४७३ मील है। वलयाकार क्षेत्र का विस्तार ५१०५६६ योजन अथवा [प्रायः ५११ × ४५४५ मील], २३२२४९५ मील है।

दृष्टिगोचर होनेवाले धूमकेतुओं तथा विविध समय पर उत्कापात करनेवाले उत्कातारों के पथों को भी निश्चित किया जा चुका है। पृथ्वी का भ्रमण न केवल अपनी अक्ष पर, वरन् सूर्य के परितः भी माना जाता है। मंडल का १२ मील प्रति घंटे की गति से, हरकुलीज नामक नक्षत्र के विगा तारे के पास solar apex (सौर्यशीर्ष) की ओर गमन निश्चित किया गया है। पर, वैज्ञानिक पृथ्वी की वयार्थ गति आज तक नहीं निकाल सके और आईसटीन के कथनानुसार प्रयोग द्वारा कभी न निकाल सकेंगे। पृथ्वी की शुद्ध एव निरपेक्ष गति को कुछ अवधारणाओं के आधार पर माइकेलसन और मारले ने अपने अति सूक्ष्म प्रयोगों द्वारा निकालने का प्रयत्न किया था, पर वे जिस फल पर पहुँचे उससे भौतिक शास्त्र में नवीन उपधारणाओं (postulates) का पुनर्गठन आईसटीन ने सापेक्षवाद के आधार पर किया। यह सिद्धान्त तीन प्रसिद्ध प्रयोगों द्वारा उपयुक्त सिद्ध किया जा चुका है।

आज कल ज्योतिषशास्त्रियों ने सम्पूर्ण आकाशको ८८ खंडों में, ८८ नक्षत्रों के आधार पर विभाजित किया है। आकाश के किसी भी भाग का अच्छा से अच्छा अध्ययन तथा उस भाग में आकाशीय पिंडों का गमन फोटोग्राफी के द्वारा हो सकता है। तारों के द्वारा विकीर्णित प्रकाश और ताप ऊर्जा (energy) के आपेक्षिक मानों को सूक्ष्म रूप से ठीक निश्चित करने के लिये कई महत्ता संहतियां (magnitude systems) स्थापित की गई हैं, वे क्रमशः (Visual Magnitudes) दृष्ट या आभासी महत्ताएं, (Photographic Magnitudes) भाचित्रणीय महत्ताएँ (Photo-visual Magnitudes) माभासी महत्ताएँ और (Photo-electric Magnitudes) भाविद्युतीय महत्ताएँ आदि हैं। सन् १७१८ में महान् ज्योतिषी हेले ने बतलाया कि हिपरससके समय से तीन उज्ज्वल तारे सीरियस, आर्कचरस

जम्बूद्वीप में दो चंद्र माने गये हैं जो सम्मुख स्थित रहते हैं। चारों ओर का क्षेत्र संचरित होने के कारण चारक्षेत्र कहलाता है।

गा. ७, १६१— अर्धतर चंद्रबीथी की परिधि ३१५०८९ योजन तथा त्रिज्या (जम्बूद्वीप के मध्य बिन्दु से) ४९८२० योजन मानी गई है। यदि π का मान $\sqrt{१०}$ अथवा प्रायः ३.१६ लिया जाय तो परिधि (४९८२०) $\times २ \times ३.१६ = ३११७०२.४$ योजन प्राप्त होती है।

गा. ७, १७८— बाह्य मार्ग की परिधि का प्रमाण ३१८३१३ $\frac{३१६}{१००}$ योजन है।

गा. ७, १८९— इस गाथा में एक महान् सिद्धान्त निहित है। जब त्रिज्या बढ़ती है तब परिधिपथ बढ़ जाता है और नियत समय में ही वह पथ पूर्ण करने के लिये चंद्र व सूर्य दोनों की गतिया बढ़ती जाती हैं जिससे वे समान काल में असमान परिधियों का अतिक्रमण कर सकें। उनकी गति काल के असंख्यातवें भाग में समान रूप से बढ़ती होगी अर्थात् बाह्य मार्ग की ओर अग्रसर होते हुए उनकी गति समत्वरण (uniform acceleration) से बढ़ती होगी और अन्तः मार्ग की ओर आते हुए सम विमन्दन (uniform retardation) से घटती होगी।

गा. ७, १८६— चंद्रमा की रेखीय गति (linear velocity) अन्तः बीथी में स्थित होने पर १ मृहूर्त (या ४८ मिनट) में $३१५०८९ \div ६२ \frac{३३}{३३} = ५०७४ \frac{४४}{४४}$ योजन होती है। अथवा, चंद्रमा की गति इस समय १ मिनट में प्रायः

$$\frac{५०७४ \times ४४४४}{४८} = ४८०४४० \text{ मील रहती है।}$$

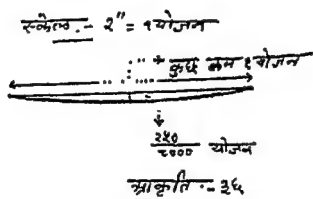
गा. ७, २००— जब चंद्र बाह्य परिधि में स्थित रहता है तब उसकी गति १ मिनट में प्रायः

$$\frac{५१२५ \times ४४४४}{४८} = ४८५२७३ \frac{२१}{४८} \text{ मील रहती है।}$$

और एलडेब्रान अपने पड़ोसी तारों की अपेक्षा अपनी स्थिति से कुछ मापने योग्य मान में हट गये हैं। तब तक तारों को एक दूसरे की अपेक्षाकृत स्थिति में सर्वदा स्थिर माना जाता था और इस आविष्कार ने 'तारों के ब्रह्माण्ड' की अवधारणा में क्रांति उत्पन्न कर दी। क्या और अन्य तारे भी हजारों वर्षों में ऐसी ही गति से गमन कर अपनी अपनी स्थिति से हटते होंगे? हेली के इस आविष्कार का नाम Proper Motions of Stars रखा गया।

तारों के इन यथार्थ गमनों Proper Motions को समझाने के लिये सम्पूर्ण सौर्यमंडल का गमन हरकुलीज नक्षत्र के विगा तारे की ओर मानने का प्रयास किया गया है, पर डब्लु. एम्. स्मार्ट के शब्दों में, "At present, we are ignorant of the proper motions of all but the nearest stars; when our inquiries embrace the most distant regions of the stellar universe the solar motion can then be defined in relation to the whole body of stars regarded as a single immense group. Even then we are no nearer the conception of absolute solar motion, for extra-stellar space is unprovided with anythings in the shape of fixed land marks", यह स्थिति भी असंतोषजनक है, क्योंकि सूर्य या तारों की प्रकेवल गति (absolute velocity) निकालना एक कल्पना (abstraction) मात्र है। इससे केवल सूर्य की गति की दिशा का ज्ञान भर होता है। इन यथार्थ गमनों (Proper motions) में चक्रीय परिवर्तन भी होते हैं। सन् १९०४ के पूर्व वैज्ञानिकों ने यही धारणा बना रखी थी कि तारों का गमन (movement) किसी अचल नियम के आधार पर नहीं होता है। उसके पश्चात् सन् १९०४ में प्रोफेसर कैप्टिन (Kapteyn) ने तारों के दो प्रकार की धाराओं (streams of star)

गा. ७, २०१ आदि—चंद्रमा की कलाओं^१ तथा ग्रहण को समझाने के लिये चंद्रविम्ब से ४ प्रमाणांगुल नीचे कुल कम १ योजन विस्तारवाले काले रंग के दो प्रकार के राहुओं की कल्पना की गई है, एक तो दिन राहु और दूसरा पर्व राहु। राहु के विमान का बाह्य $2\frac{3}{4}$ योजन है। आकृति-३६ देखिये।



मीलों में इसका प्रमाण $4545 \times 2\frac{3}{4}$

अथवा 14232 मील है।

दिनराहु की गति चंद्रमा की गति के समान मानी गई है और उसे कलाओं का कारण माना गया है।

गा. ७, २१३—चांद्र दिवस का प्रमाण $21\frac{1}{4}$

ग्रहूर्त अथवा $21\frac{1}{4} \times 24$ मिनिट अथवा २४ घंटे

$40\frac{1}{4}$ मिनिट माना गया है।

गा. ७, २१६—पर्वराहु को छह मासों में होनेवाले चंद्रग्रहण का कारण माना गया है।

गा. ७, २१७—इस राहु का इस स्थिति में गतिविशेषों से आ जाना नियम से होता माना गया है।

चंद्रो की तरह जम्बूद्वीप में दो सूर्य माने गये हैं जो चार क्षेत्रों में उसी समान गमन करते हैं। विशेषता यह है कि सूर्य की 128 गलियां हैं। प्रत्येक गली का विस्तार सूर्य के व्यास के समान है तथा प्रथम पथ और मेरु के बीच का अंतराल 44220 योजन है जो चंद्र के लिये भी इतना ही है।

प्रत्येक वीथी का अंतराल २ योजन अथवा 9090 मील निश्चित किया गया है।

गा. ७, २२८—जम्बूद्वीप के मध्य बिन्दु को केन्द्र मान कर सूर्य के प्रथम पथ की त्रिज्या $(40000 - 120 = 39880)$ योजन है। दोनों सूर्य सम्मुख स्थित रहते हैं।

गा. ७, २३७—अंतिम पथ में स्थित रहने पर दोनों सूर्यों के बीच का अंतर $2 \times (40000 - 120)$ योजन रहता है।

सूर्यपथ भी चंद्रपथ के समान समापन winding और असमापन unwinding कुंतल spiral के समान होता है। चन्द्रमा सम्बन्धी १५ ऐसे चक्र और सूर्य के सम्बन्ध में 128 ऐसे चक्र होते हैं।

गा. ७, २४६ आदि—भिन्न २ नगरियों को दर्शाने के लिये उनकी परिधि या (उनकी केन्द्र से दूरी अथवा अक्षांश रेखाएं) दी गई हैं। ये नगरियां इस प्रकार स्थित मानी गई हैं कि प्रत्येक की परिधि उत्तरोत्तर क्रमशः $1615\frac{1}{2}$ और 1476 योजन बढ़ी हुई ली गई हैं।

१ वैज्ञानिकों ने दूरबीन के द्वारा ग्रहों में भी चंद्र के समान कलायें देखी हैं जिनका समाधान उसी सिद्धान्त पर होता है जिस सिद्धान्त पर चंद्रमा की कलाओं के होने का समाधान होता है। त्रिलोकसार में उपर्युक्त कथन के सिवाय एक और कथन यह है—अथवा कलाओं का कारण चंद्रमा की विशेष गति है।

का आविष्कार किया जिसके सम्बन्ध में श्री डब्लु. एम्. स्मार्ट के ये शब्द पर्याप्त हैं, "Star streaming remains a puzzling phenomenon: tentative explanations have indeed been offered, but it would appear that its complete elucidation is a task for future Astronomers." प्रथम महत्ता (first magnitude) का तारा सीरियस जिसकी दूरी $48,000,000,000,000$ मील मानी गई है, दृष्टिरेखा की तिर्यक् (cross) दिशा में 10 मील प्रति सेकण्ड की गति से चलायमान निश्चित किया गया है। रश्मिविरलेषक यंत्रों के द्वारा तारों का भिन्न २ श्रेणियों में विभाजन कर, भिन्न-भिन्न रंगवाले तारों के भिन्न-भिन्न तापक्रम को निश्चित कर उनकी,

गा. ७, २६५ आदि— जिस प्रकार चंद्रमा की गति बाह्य मार्ग की ओर अग्रसर होते हुए समत्वरण से बढ़ती है उसी प्रकार सूर्य की भी गति होती है। वह भी समान काल में असमान परिधियों को सिद्ध करता है। एक मुहूर्त अथवा ४८ मिनट में प्रथम पथ पर उसकी गति ५२५१ $\frac{३९}{६५}$ योजन अथवा एक मिनट में प्रायः

$$\frac{५२५१\frac{३९}{६५} \times ४५४५}{४८} = ४९७२५१\frac{३९}{६५} \text{ मील होती है।}$$

गा. ७, २७१— १८४वें मार्ग में उसकी गति १ मिनट में प्रायः

$$\frac{५३०५\frac{३९}{६५} \times ४५४५}{४८} = ५०२३४०\frac{३९}{६५} \text{ मील होती है।}$$

गा. ७, २७२— चंद्र की तरह सूर्य के नगरतल के नीचे केतु के (काले रंग के) विमान का होना माना गया है। जहाँ विस्तार और बाह्य राहु के विमान के समान माना गया है।

गा. ७, २७६— यहाँ ग्रंथकार ने समस्त जम्बूद्वीप तथा कुछ लवण समुद्र में होनेवाले दिन-रात्रि के प्रमाण को बतलाने के लिये मुख्यतः १९४ परिधियों या अक्षांशों में स्थित प्रदेशों का वर्णन किया है।

गा. ७, २७७— जब सूर्य प्रथम पथ में अर्थात् सबसे कम त्रिज्यावाले पथपर स्थित होता है तो सब परिधियों में १८ मुहूर्त का दिन अथवा १४ घंटे २४ मिनट का दिन और १२ मुहूर्त की रात्रि अथवा ९ घंटे ३६ मिनट की रात्रि होती है (यहाँ मुहूर्त को दिन-रात का ३० वां भाग लिया गया है)। ठीक इसके विपरीत जब सूर्य बाह्यतम पथ में रहता है तब दिन १२ मुहूर्त का तथा रात्रि १८ मुहूर्त की होती है।

गा. ७, २९०— ग्रंथकार ने उपर्युक्त प्रकार से दिन-रात्रि होने का कारण सूर्य की गति विशेष बतलाया है।

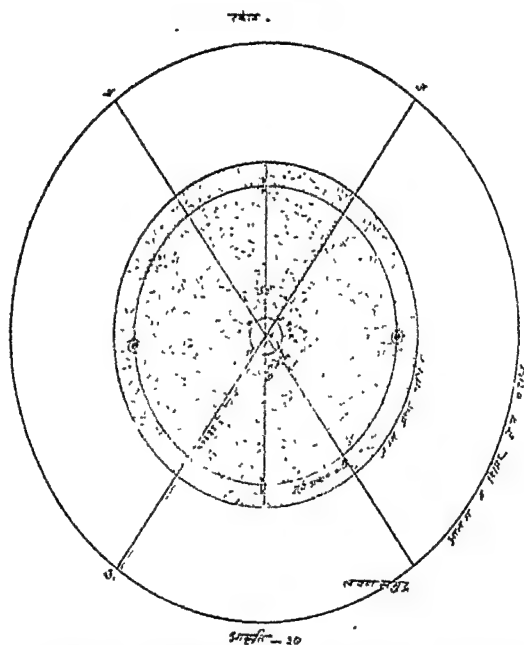
गा. ७, २९२-४२०— इन गाथाओं में दिये गये आतप व तिमिर क्षेत्रों का स्पष्टीकरण निम्न लिखित चित्र से स्पष्ट हो जावेगा। यहाँ आकृति-३७ देखिये (पृ. ९३)।

जब सूर्य प्रथम बीथी पर स्थित होता है उस समय आतप व तिमिर क्षेत्र गाड़ी की उद्वि (spokes) के प्रकार के होते हैं। मान लिया गया है कि किसी विशिष्ट समय पर (at a particular instant) उस बीथी पर सूर्य स्थिर हैं। उस समय बननेवाले आतप व तिमिर क्षेत्र के वर्णन के लिये गाथा २९२-९५, ३४३ और ३६२ देखिये।

जब सूर्य बाह्य पथ में स्थित रहता है तब चित्र ठीक विपरीत होता है, अर्थात् तापक्षेत्र तिमिर-क्षेत्र के समान और तिमिरक्षेत्र तापक्षेत्र के समान हो जाता है।

दृष्टिरेखा (line of sight) में गति को भी निश्चित किया गया है। २०० मील प्रति सेकंड से लेकर २५० मील प्रति सेकंड तक की गतिवाले तारे प्रयोगों द्वारा प्रसिद्ध किये जा सके हैं। ये गतियाँ उन तारों के यथार्थ गमनों (proper motions) का होना सिद्ध करती हैं। तारे और भी कई तरह के होते हैं, जैसे द्विगुण या युग्म तारे (double stars), चल तारे (variable stars) राक्षस और बौने तारे (giant and dwarf stars) इत्यादि।

अन्त में नीहारिकाओं (Nebulae) के विशद विवेचन में न पड़कर केवल उनके प्रकारों तथा उनके अवलोकनीय प्रयोगों द्वारा आधुनिक ब्रह्माण्ड की अवधारणा को झलक देखना ही पर्याप्त होगा। अपने लक्षणों के आधार पर तारापुंज नीहारिकाओं को चार प्रकारों में विभाजित किया जा सकता है : अंध नीहारिकाएं (dark nebulae) धुंधली नीहारिकाएं (diffuse luminous nebulae),



चित्र में चन्द्रमा और सूर्य की स्थितियाँ किसी समय पर क्रमशः ☾ और ☉ प्रतीकों द्वारा दर्शाई गई हैं। इस दशा में आतप और तम क्षेत्र के अनुपात ३:२ में हैं अर्थात् आतप क्षेत्र १०८° , १०८° तथा तम क्षेत्र ७२° , ७२° के अन्तर्गत निहित हैं। आतप व तिमिर क्षेत्रों का विस्तार केन्द्र से लेकर लग्न समुद्र के विष्कम्भ के छठवें भाग तक है अथवा $५०००० + \frac{३०००००}{३} = ८३३३३\frac{१}{३}$ योजन तक है। मेरु पर्वत के ऊपर कल भाग में $९४८६\frac{१}{३}$ योजन चाप पर सूर्य का आतप क्षेत्र रहता है और कग भाग में $६३२३\frac{१}{३}$ योजन चाप पर तिमिर क्षेत्र रहता है चाहे चन्द्रमा वहाँ हो या न हो। इसी प्रकार सम्मुख स्थित अन्य सूर्य का आतप और तिमिर क्षेत्र रहता है। ये क्षेत्र सूर्य के गमन से प्रति क्षण बदलते रहते हैं अथवा सूर्य की स्थिति के अनुसार तिष्ठते हैं। सूर्य की इस स्थिति में अन्य परिधियों पर भी इसी अनुपात में आतप एवं तिमिर क्षेत्र होते हैं।

ग्रहीय नीहारिकाएँ (planetary nebulae) और कुन्तल नीहारिकाएँ (spiral nebulae). रंगालेख (spectroscope) या रश्मिविश्लेषक यंत्र द्वारा यह ज्ञात हुआ है कि तारों के गोल पुंज (globular clusters) दृष्टिरेखा की दिशा में मध्यमान से (average) ७५ मील प्रति सेकंड की गति से चलायमान हैं। उपर्युक्त श्रेणियों में प्रथम तीन प्रकार की नीहारिकायें तो आकाश-गंगा के क्षेत्र के आसपास पाई जाती हैं और अन्तिम श्रेणी की नीहारिकाएँ आकाशगंगा से दूर पाई जाती हैं। रश्मिविश्लेषक यंत्रों की सहायता से प्राप्त फलों से वैज्ञानिकों ने निश्चित किया है कि भिन्न भिन्न दूरी पर स्थित नीहारिकाएँ दूरी के अनुसार अधिकाधिक प्रवेग से दृष्टिरेखा (line of sight

यहां आतप क्षेत्र का क्षेत्रफल सूत्रानुसार निम्न लिखित होगा—

क्षेत्रफल म च छ = $\frac{2}{3}(\text{त्रिज्या})^2 \times (\text{कोण रेडियन माप में})$

$$= \frac{2}{3}(\angle 232323\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$= \frac{2}{3}(\angle 232323\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} \pi$$

π का मान $\sqrt{10}$ लेने पर, ग्रंथकार ने इस क्षेत्रफल को प्रायः

६५८८०७५०००० वर्ग योजन निश्चित किया है। इसी प्रकार तिमिर क्षेत्र म च ज का क्षेत्रफल

$$= \frac{2}{3}(\angle 232323\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} \pi \text{ होता है।}$$

π का मान $\sqrt{10}$ लेकर यह प्रमाण प्रायः ४३९२०५०००० वर्ग योजन होता है।

३४३वीं गाथा के बाद विशेष विवरण में ताप क्षेत्र निकालने का साधारण सूत्र दिया गया है।

किसी विशिष्ट दिन, जिसमें M सुदुर्लभ हो, जब कि सूर्य M वीं बीधी पर स्थित हो तब P परिधि पर तापक्षेत्र निकालने के लिये निम्न लिखित सूत्र है।

or radial velocity) या अरीय दिशा में हमसे दूर होती जा रही हैं। जैसे २३,०००,००० प्रकाश वर्ष दूर की नीहारिकाएं प्रायः ३००० मील प्रति सेकण्ड की गति से दृष्टिरेखा में, और १०५,०००,००० प्रकाश वर्ष दूर की नीहारिकाएं प्रति सेकण्ड १२,००० मील प्रति सेकण्ड की गति से दृष्टिरेखा में हमसे दूर होती जा रही हैं।

सन् १७५० में दूरबीन की सहायता से नीहारिकाओं के प्रदेश का आवरण हटा और गठित गोल गुंज (compact globular cluster), चपटे होते जानेवाले ऊनेन्द्रज की भांति (flattening ellipsoidal) और असमापन कुन्तल (unwinding spiral) नीहारिकाएं दृष्टिगोचर हुईं, जिनमें औसत नीहारिका हमारे सूर्य से चमक में ८५०००००० गुनी तथा मात्रा में १०००००००००० गुनी निश्चित हुईं, जहां दिखनेवाली धुंखलाहट, उसकी दूरी के अनुसार थी। हमारी आकाशगंगा एक पुरानी असमापन कुन्तल नीहारिका निश्चित की गई जिसकी अंतर्तरीय वरिमा (interstellar space) में विभिन्न प्रकार की वायु के बादल और धूल होने से आकाशगंगा के हृदय और घारा (edge) में स्थित नीहारिकाओं की ऊर्जाएं (energy) बड़े परिमाण में हम तक पहुँचने से रुक गईं। यह भी देखा गया कि वरिमा (space) के किसी निश्चित क्षेत्र में नीहारिकाओं की संख्या दूरी के अनुसार समरूप से बढ़ती है।

वैज्ञानिकों ने फिर नीहारिका के विषय में आधुनिक दूरबीन से चार प्रकार के माप प्राप्त किये। ये क्रमशः आभासी महत्ता (apparent magnitude), विस्थापन महत्ता (displacement magnitude), संख्या महत्ता (number magnitude) और रंग विस्थापन न्यास (colour displacement data) हैं। इस प्रकार प्राप्त न्यासों से उन्होंने सम्भव ब्रह्माण्डों के विषय में सिद्धान्तों के परिणामों की तुलना कर उन्हें सुधारने का प्रयास किया। उनके सम्भव ब्रह्माण्डों की एक झलक निम्न लिखित संकलित अंग्रेजी अवतरणों से अधिक स्पष्ट हो जावेगी क्योंकि उसके अनुवाद से शायद कुछ अति हो जावे।

“With the relativist cosmologist's postulations that the geometry of space is determined by its contents & that all observers regardless of locations, see the same general picture of the Universe, it is proved mathematically that either the universe is unstable, expanding or contracting. Another aspect of such universe depends upon the curvature calculated. When redshifts are interpreted as velocity shifts, curvature is taken positive ensuring a closed space, finite volume and a definite universe at a

तापक्षेत्र = $\frac{M(P)}{६०}$ योजन । यहा M का मान, n वीं वीथी के प्रमाण से निकाला जा सकता है ।

इस प्रकार, तापक्षेत्र न केवल दिन की घटती बढ़ती पर, वरन् परिधि पर भी निर्भर रहता है ।

इसका स्पष्टीकरण यह है— कोई भी परिधि का पूर्ण चक्र अथवा सूर्य द्वारा मेरु की पूर्ण प्रदक्षिणा $१८ + १८ + १२ + १२$ मुहूर्तों अथवा ६० मुहूर्तों में संपूर्ण होती है । ज्यों ज्यों सूर्य बाह्य मार्ग की ओर जाता है त्यों त्यों दिन का प्रमाण $\frac{२}{६०}$ मुहूर्त प्रतिदिन घटता है और तापक्षेत्र में हानि $\frac{P}{६०} \times \frac{२}{६९}$ वर्ग योजन होती है । यह प्रमाण $\frac{P}{१० \times १८३}$ योजन होगा ।

यहां सूर्य के कुल अंतरालों की संख्या १८३ है ।

स्पष्ट है, कि सूर्य के दूर जाने पर तापक्षेत्र में हानि होने से तमक्षेत्र में वृद्धि होगी ।

गा. ७, ४२१ आदि— ४२२वीं गाथा में उल्लेखित सूत्रों का विवरण पहिले दिया जा चुका है । यहा विशेष उल्लेखनीय बात चक्षुस्पर्श क्षेत्र है । जब सूर्य P_8 वीं परिधि पर स्थित रहता है तब चक्षुस्पर्श क्षेत्र $P_8 \times \frac{२}{६०}$ योजन होता है । यहां ९ मुहूर्तों में सूर्य निषध पर्वत से अयोध्या तक की परिधि को समाप्त करता है तथा सम्पूर्ण परिधि के परिभ्रमण (revolution) को ६० मुहूर्तों में सम्पूर्ण करता है । उल्लेख चक्षुस्पर्शक्षेत्र के लिये P_8 का मान ३१५०८९ योजन है ।

गा. ७, ४३५ आदि— भिन्न २ परिधियों पर स्थित भिन्न २ नगरियों में एक ही समय दिये गये समय के आधार पर उन नगरियों के स्थानों को इन गाथाओं में दिये गये न्यासों के आधार पर निश्चित कर सकते हैं और उनकी बीच की दूरी योजनों में निकाल सकते हैं, क्योंकि जितना उनके समय के बीच अंतराल है उतने काल में सूर्य द्वारा जितनी परिधि तय होगी उतना उन नगरों के बीच परिधि पर अंतराल होगा । अन्य परिधियों पर स्थित नगरियों के बीच की दूरी भी निश्चित की जा सकती है ।

गा. ७, ४४६— चक्रवर्ती अधिक से अधिक $५५७४३\frac{३}{४}$ योजन की दूरी पर स्थित सूर्य को देख सकता है ।

particular instant expanding with time. It dates back to about 2×10^{10} years, though, the stars of our galaxy are thought to be born 10^{12} years ago.

If the curvature is taken negative the formula shows an open hyperbolic space of radius 3.5×10^8 parsecs—an infinite stationary universe of mean density 10^{-30} gm/cm³. Limiting case of zero curvature is "flat" Euclidean space with an infinite radius.

Other theories propounded in favour of expanding universe are the 1) kinematic theory based on Euclidean space and mathematical structure of special relativity and 2) the creation of matter theory. The former is unscientific because of its indefinite definition of distance and avoidance of observational date. The latter is not sound as it assumes creation of matter out of nothing in the form of hydrogen atoms and there is no evidence of its, steady state of universe, assumption.

Thus we seem to face, as once before in the days of Copernicus a choice between a small finite universe and a universe infinitely large plus a new principle of nature."

देखें, यह समस्या, बितन्तु ज्योतिर्लोकविज्ञान (Radio Astronomy) और माइंट पालोमर की २००" दूरबीन तथा अन्य नवीन आविष्कार कदा तक सुलझा सकते हैं ।

इसके साथ ही संसार के द्वीपों की कल्पना की एक झलक को हम स्मार्ट के शब्दों में प्रस्तुत करेंगे, "According to our present views, the universe is a vast assemblage of separate

गा. ७, ४५४-५६— सूर्य का पथ सूची चय $२ + \frac{४८}{६१} = \frac{१७०}{६१}$ योजन है।

भिन्न-भिन्न जगहों (जम्बूद्वीप, वेदिका और लवण समुद्र) के चारक्षेत्रों में उदयस्थानों को निकालने के लिये उस जगह के चारक्षेत्र के अंतराल में $\frac{१७०}{६१}$ का भाग देते हैं। एक बीधी का मार्ग समाप्त होने पर हटाव $\frac{१७०}{६१}$ योजन होता है। इसी समय दूसरी बीधी पर एक परिभ्रमण के पश्चात् उदय होता है। इस प्रकार सर्व उदयस्थानों की संख्या १८४ है।

गा. ७, ४५८ आदि— ग्रहों के विषय का विवरण काल वश नष्ट हो चुका है।

चंद्र के आठ पथों में (क्रमशः पहिले, तीसरे, छठवें, सातवें, आठवें, दशवें, ग्यारहवें तथा पंद्रहवें पथ में) भिन्न-भिन्न नक्षत्रों का नियमित गमन बतलाया गया है। अथवा, भिन्न-भिन्न गालियों में स्थित नक्षत्रों के नाम दिये गये हैं।

गा. ७, ४६५-४६७— एक चंद्र के नक्षत्रों की संख्या २८ बतलाई गई है पर कुल नक्षत्रों की संख्या (जगन्मोक्षी) $२ \div [संख्यात प्रतरांगुल \times १०९७३१८४०००००००००१९३३३१२] \times ७$ बतलाई गई है। यह राशि निश्चित रूप से असंख्यात है। इसी प्रकार समस्त तारों की संख्या भी असंख्यात बतलाई गई है।

जम्बूद्वीप के १ चंद्र के २८ नक्षत्रों के ताराओं से बने हुए आकार बतलाये गये हैं। वे भिन्न-भिन्न वस्तुओं और जीवों के आकार के वर्णित हैं।

गा. ७, ४७५-७६— आकाश को १०९८०० गगनखंडों में विभक्त किया गया है जिसमें, १८३५ गगनखंड नक्षत्रों के द्वारा १ मुहूर्त में अतिक्रमित होते हैं। इस गति से कुल गगनखंड चलने में $\frac{१०९८००}{१८३५} = ५९ \frac{३०७}{३६७}$ मुहूर्त लगते हैं अथवा $\frac{१०९८००}{१८३५} \times \frac{४८}{६०}$ घंटे अथवा ४७ घंटे, ५२ मिनट $९ \frac{२८५}{१८३५}$ सेकंड लगते हैं। आधा मार्ग तय करने में २३ घंटे ५६ मिनट $४१ \frac{१८५}{३६७}$ सेकंड लगते हैं।

गा. ७, ४७८ आदि— भिन्न २ नक्षत्रों की गतियां भिन्न २ परिधियों में होने के कारण भिन्न हैं। सभी नक्षत्र, यद्यपि भिन्न परिधियों में स्थित हैं, तथापि वे $५९ \frac{३०७}{३६७}$ मुहूर्तों में समस्त गगनखंड तय कर लेते हैं।

systems, each of great dimensions, which however, are small in comparison with the stupendous distances by which any two neighbouring systems are separated from one another. We may liken the universe to a broad ocean studded with small islands of varying sizes; one of the largest of these islands is believed to represent the systems of which the solar system is but a humble member, the galactic system as it is called. The other systems are the spiral nebulae whose number we can but vaguely guess."—"The Sun, The Stars, And The Universe." p. 269.

इस तरह हम यह अनुभव करते हैं कि आधुनिक ज्योतिष के सिद्धांतों तथा उनके आधार पर प्राप्त फलों की तुलना हम जैनाचार्यों द्वारा प्रस्तुत ज्योतिषों से तभी कर सकते हैं जब कि चन्द्र और सूर्य आदि तथा वायुमंडल सम्बन्धी बातों को हम भली भांति किन्हीं निश्चित सिद्धान्तों के आधार पर रख सकें। जहां तक पृथ्वीतल से ज्योतिष बिम्बों की दूरी का सम्बन्ध है, किसी भी स्थान से उनकी दूरी अल्पतम और अधिकतम होती है। इसका मध्यमान पृथ्वी के विभिन्न स्थानों के लिये अति भिन्न-भिन्न होगा जैसा कि जम्बूद्वीप के क्षेत्रों के विस्तार से स्पष्ट है। इसी कारण हमने केवल पृथ्वीतल से उनकी उदय केंद्राई दी है। आधुनिक दूरियों के वर्णन में हमने केवल मध्यमान दूरियों का वर्णन किया है जो पृथ्वी की मात्र एक योजन त्रिज्या के घेरे में आ जाने से सम्बन्धित हैं। स्पष्ट है कि मेरु के परितः बिम्बों का परिभ्रमण पथ पृथ्वीतल के अवलोकनकर्ता की आंख पर तिर्यक् शंकु आपतित करता है।

गा. ७, ४९३— जिस नक्षत्र का अस्त होता है उस समय उससे १६वां नक्षत्र उदय को प्राप्त होता है। गणना स्पष्ट है, क्योंकि दिन और रात्रि में १८ : १२ आदि का अनुपात रहता है, इसलिये स्थूल रूप से १७ और ११; १६ और १२ आदि नक्षत्र क्रमशः ताप और तम क्षेत्र में रहते होंगे।

गा. ७, ४९८— सूर्य, चन्द्र और ग्रहों का गमन कुंचीयन या समापन कुन्तल (winding spiral) असमापन कुन्तल (unwinding spiral) में लेता है पर नक्षत्र तथा तारों का 'अयनों का नियम' नहीं है।

गा. ७, ४९९— सूर्य के छः मास (एक अयन) में १८३ दिन-रात्रियाँ तथा चंद्रमा के एक अयन में १३६½ दिन होते हैं।

गा. ७, ५०१— अभिजित नक्षत्र का विस्तार आख पर $\frac{६३०}{१०९८००}$ रेडियन का कोण आपतित करता है। शतभिषक आदि $\frac{१००५}{१०९८००}$ पुनर्वसु आदि $\frac{१००५ \times ३}{१०६०००}$, शेष $\frac{१००५ \times २}{१०६०००}$, रेडियन का कोण आपतित करते हैं। ये एक चंद्र के नक्षत्र हैं। इसी प्रकार से दूसरे चंद्र के भी नक्षत्र हैं।

गा. ७, ५१०— सूर्य, चंद्रमा की अपेक्षा, तीस मुहूर्तों या $\frac{३० \times ४८}{६०}$ घंटों में $\frac{६२}{६१} \times \frac{४८}{६०}$ घंटे अधिक शीघ्र गमन करता है। तथा, नक्षत्र सूर्य की अपेक्षा $\frac{३० \times ४८}{६०}$ घंटों में $\frac{५}{६१} \times \frac{४८}{६०}$ घंटे अधिक शीघ्र गमन करते हैं।

गा. ७, ५१५— इसके पश्चात् भिन्न २ नक्षत्रों में सूर्य या चंद्र कितने काल तक गमन करेंगे यह आपेक्षिक प्रवेग (relative velocity) के सिद्धांत पर निकाला गया है। जैसे, अभिजित नक्षत्र के सम्बन्ध में (जिसका विस्तार ६३० गगनखंड है), सूर्य का आपेक्षिक प्रवेग अभिजित नक्षत्र को विश्रामस्थ मान लिया जाने पर १ दिन में १५० गगनखंड है। इस प्रकार, सूर्य अभिजित नक्षत्र के साथ $\frac{६३०}{१५०}$ दिन या ४ अहोरात्र और ६ मुहूर्त अधिक अथवा $\frac{६३० \times ३० \times ४८}{१५० \times ६०}$ घंटे गमन करेगा।

गा. ७, ५२१— इसी प्रकार अभिजित नक्षत्र की अपेक्षा (इसे विश्रामस्थ मानकर) चन्द्रमा का आपेक्षिक प्रवेग १ मुहूर्त में ६७ गगनखंड है, क्योंकि इतने समय में चन्द्रमा नक्षत्रों से १ मुहूर्त में ६७ गगनखंड पीछे रह जाता है। अभिजित नक्षत्र का विस्तार ६३० गगनखंड है, इसलिये इतने खंड तय करने में चन्द्रमा को $\frac{६३०}{६७} = ९\frac{३}{४}$ मुहूर्त लगेंगे। इतने समय तक चन्द्रमा अभिजित नक्षत्र के साथ गमन करेगा। यह समय $\frac{६३०}{६७} \times \frac{३०}{४}$ घंटे है। इसे त्रिलोकसार में आसन्न मुहूर्त कहा गया है।

गा. ७, ५२५ आदि— सूर्य के एक अयन में १८३ दिन होते हैं। दक्षिण अयन (annual southward motion) पहिले और उत्तर अयन (northward annual motion) बाद में होता है। आषाढ़ शुक्ला पूर्णिमा के दिन अपराह्न समय में पूर्ण युग की समाप्ति (५ वर्ष की समाप्ति) होने पर उत्तरायण समाप्त होता है। इस समय के पश्चात् नवीन युग प्रारम्भ होता है। पाँच वर्ष में $१२ \times ५ = ६०$ दिन अथवा दो माह बढ़ते हैं, क्योंकि सूर्य के वर्ष के ३६६ दिन माने गये हैं। सूर्य की अपेक्षा से चन्द्रमा का परिभ्रमण २९३ दिनों में पूर्ण होता है। इसलिये चन्द्र वर्ष $२९३ \times १२ = ३५४$ दिन का होता है। इस प्रकार एक चन्द्रवर्ष सूर्यवर्ष से १२ दिन छोटा होता है इसलिये एक युग या पाँच वर्ष में चन्द्र वर्ष के युग की अपेक्षा ६० दिन या २ मास अधिक होते हैं। उत्तरायण की समाप्ति के पश्चात् दक्षिणायन आरंभ मास के कृष्ण पक्ष की प्रतिपदा के दिन जब कि अभिजित नक्षत्र और चन्द्रमा का योग रहता है, प्रारम्भ होता है, वही नवीन पाँच वर्षवाले युग का प्रारम्भ है।

ति. ग. १३

जब सूर्य प्रथम आभ्यंतर बीथी पर होता है तब सूर्य का दक्षिण अयन का प्रारम्भ होता है। जब वह अंतिम बाह्य बीथी पर स्थित होता है तब उत्तरायण का प्रारम्भ होता है। जब एक अयन की समाप्ति होकर नवीन अयन का प्रारम्भ होता है उसे आवृत्ति (frequency or repetition) कहा गया है। अयन के पलटने को भी आवृत्ति कहते हैं। दक्षिणायन को आदि लेकर आवृत्तियों पहली, तीसरी, पांचवी, सातवीं और नवमी, पांच वर्ष के भीतर होगी क्योंकि पांच वर्ष में दस अयन होते हैं। इसी प्रकार उत्तरायण की आवृत्तियाँ इस युग में दूसरी, चौथी, छठवीं, आठवीं और दसवीं होती हैं। इस प्रकार दक्षिणायन की दूसरी आवृत्ति श्रावण मास के कृष्ण पक्ष त्रयोदशी को होती है जब कि चंद्रमा मृगशीर्षा नक्षत्र में तिष्ठता है। यह आवृत्ति १ चंद्र वर्ष के पश्चात् १२ दिन बीत जाने पर हुई। इसी प्रकार दक्षिणायन की तीसरी आवृत्ति श्रावण शुक्ल दशमी के दिन चंद्रमा जब विशाखा नक्षत्र में स्थित रहता है तब होती है। इस प्रकार श्रावण मास में दक्षिणायन की पांच आवृत्तियाँ ५ वर्ष के भीतर होती हैं। उत्तरायण की प्रथम आवृत्ति १८३ दिन बीत जाने पर अर्थात् माघ मास में कृष्णपक्ष की सप्तमी (चंद्र अर्द्ध वर्ष बीत जाने के ६ दिन पश्चात्) तिथि को जब कि चंद्रमा हस्त नक्षत्र में स्थित रहता है, होती है। इसी प्रकार उत्तरायण की दूसरी आवृत्ति ३६६ दिन पश्चात् या चंद्र वर्ष के बीत जाने पर १२ दिन पश्चात् उसी माघ मास में शुक्ल पक्ष की चौथी तिथि पर जब कि चंद्रमा शतभिषक नक्षत्र में स्थित रहता है, तब होती है। इसी प्रकार अन्य आवृत्तियों का वर्णन है।

इसी आवृत्ति के आधार पर समान्तर श्रेढि बनने से (formation of an arithmetical progression) विषुव और आवृत्ति की तिथि निकालने के लिये तथा शुक्ल पक्ष और कृष्ण पक्ष का निश्चय करने के लिये सरल प्रक्रिया सूत्ररूप से दी गई है।

“विषुव”, पूर्ण विश्व में दिन और रात्रि के अंतराल बराबर होने को कहते हैं। इस समय सूर्य आभ्यंतर और बाह्य बीथियों के बीचवाली बीथी में रहता है, अथवा विषुवत् रेखा, (भूमध्य रेखा) पर स्थित रहता है। दक्षिणायन के प्रारम्भ के चंद्र के चतुर्थांश वर्ष बीत जाने के ३ दिन पश्चात् सूर्य इस बीथी को ९१ $\frac{1}{2}$ दिन पश्चात् प्राप्त होता है। इस समय कार्तिक मास के कृष्ण पक्ष की तृतीया रहती है और चंद्रमा रोहिणी नक्षत्र में स्थित रहता है। दूसरा विषुव इस समय के चंद्र अर्द्ध वर्ष के बीत जाने पर ६ दिन पश्चात् होता है। जब कि चंद्र वैशाख मास के कृष्ण पक्ष की नवमी को धनिष्ठा नक्षत्र में रहता है। इस प्रकार कुल विषुवों की संख्या उत्सर्पिणी काल में निकाली जा सकती है। दक्षिण अयन, पर्य का असंख्यातवां भाग या $\frac{p}{2}$ होता है। विषुव का प्रमाण इससे दूना है अर्थात् $2\frac{p}{2}$ जहां p पर्यका और 2 असंख्यात का प्रतीक है।

यहां अक्षर ज्योतिषियों का निरूपण किया गया है।

स्वयंभूवर द्वीप का विष्कम्भ $\frac{\text{जगश्रेणी}}{५६} + ३७५००$ योजन है तथा समुद्र का विष्कम्भ $\frac{\text{जगश्रेणी}}{२८} + ७५०००$ योजन है। मानुषोत्तर पर्वत से आदि लिखा गया है तथा ५०००० योजन समुद्र की बाहरी सीमा के इसी तरफ तक का अंतराल

$$\frac{\text{जगश्रेणी}}{२८} + (७५००० - ११५२५००० - ५००००) \text{ योजन}$$

$$\text{अथवा } \frac{\text{जगश्रेणी}}{२८} - ११५००००० \text{ योजन होता है।}$$

इसलिये, कुल वलयों की संख्या

$$\left[\frac{\text{जगश्रेणी}}{२८} - ११५००००० \right] \times \frac{२}{१०००००}$$

अथवा $\frac{\text{जगश्रेणी}}{१४०००००} - २२$ होती है।

पुष्करवर समुद्र के प्रथम वलय में २८८ चंद्र व सूर्य हैं। किसी द्वीप अथवा समुद्र के प्रथम वलय में स्थित चंद्र व सूर्य की संख्या = $\frac{\text{उम द्वीप या समुद्र का विष्कम्भ} \times ९}{१०००००}$ होती है। प्रत्येक द्वीप समुद्र का वित्तांतर उच्चोत्तर द्विगुणित होता गया है और प्रारम्भ पुष्करवर द्वीप से होता है जहा विष्कम्भ १६००००० योजन है। इस प्रकार सूत्र बनाया गया है।

पृ. ७६४ आदि— सपरिवार चन्द्रों के लाने का विधान :—

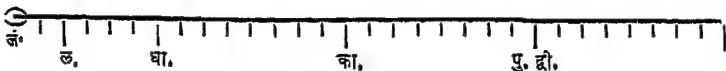
अभी तक, जैसा मुझे प्रतीत हुआ है उसके अनुसार, वीरसेनाचार्य के कथन की पुष्टि का प्रतिपादन निम्न लिखित होगा।

पृष्ठ ६५८ पर गाथा ११ में ग्रंथकार ने सम्पूर्ण ज्योतिष देवों की राशि का प्रमाण; $\left(\frac{\text{जगश्रेणी}}{२५६ \text{ प्रमाणांगुल}} \right)^2$ बतलाया है।

पृष्ठ ७६७— ज्योतिष विम्बों का प्रमाण $\frac{\text{जगप्रतर}}{६५५३६ \times १६५५३६१}$ अथवा

$\left(\frac{\text{जगश्रेणी}}{२५६ \text{ प्रमाणांगुल}} \right)^2 \div \frac{१}{१६५५३६१}$ बतलाया है। तथा, इसमें प्रत्येक विम्ब में रहनेवाले तत्प्रायोग्य

संख्यात जीव (१६५५३६१) का गुणा करने पर सम्पूर्ण ज्योतिषी देवों, अथवा ज्योतिषी जीव राशि का प्रमाण प्राप्त होता है। स्मरण रहे कि जगश्रेणी का अर्थ, जगश्रेणी में स्थित प्रदेशों की गणात्मक संख्या है, तथा प्रमाणांगुल का अर्थ प्रमाणांगुलकुलक में प्रदेशों की गणात्मक संख्या है। इस न्यास के आधार पर वीरसेन ने सिद्ध किया है कि यद्यपि परिकर्मसूत्र में रज्जु के अर्द्धच्छेदों की संख्या, 'द्वीप-समुद्र की संख्या में रूपाधिक जम्बूद्वीप के अर्द्धच्छेदों के प्रमाण को मिला देने पर प्राप्त होती है, तथापि उस कथन का अर्थ उपयुक्त लेना चाहिये। यहा रूपाधिक का अर्थ अनेक से है, जहा अनेक, संख्यात, असंख्यात दोनों हो सकता है, एक नहीं। यह सिद्ध करने में, उनकी अद्वितीय प्रतिमा का चमत्कार प्रकट हो जाता है। आगमप्रणीत वचनों में उनकी प्रगाढ श्रद्धा थी, पर, उन वचनों की वास्तविक भावना को युक्तिवत् से सिद्ध करने की प्रेरणा भी थी। हम प्रकार, परिकर्म के वचनों का यथार्थ अर्थ प्रकट करने के लिये, उन्होंने पूर्वाचार्यों के के कथनों को आगमानुसार, गणित की कसौटी पर पुनः कसा। स्पष्ट है, कि तिलोयपण्णत्ती के इस अवतरण में वीरसेन की शैली का प्रवेश हुआ है, पर यह सुनिश्चित प्रतीत होता है कि यतिवृषभ ने परिकर्मसूत्र से इस आगमप्रणीत ज्योतिष विम्ब संख्या के प्रमाण का विरोध वीरसेन से पहिले निर्दिष्ट कर दिया था, और उनके पश्चात् वीरसेन ने उसका निरूपण कर, परिकर्मसूत्र का उपयुक्त अर्थ स्पष्ट किया। हम इसका निरूपण कुछ आधुनिक शैली पर करने का प्रयत्न करेंगे।



स्पष्ट है कि जम्बूद्वीप के विष्कम्भ १००००० योजन को इकाई लेकर यदि अन्य द्वीप-समुद्रों के विष्कम्भों को प्ररूपित करें तो वे क्रमशः लवणोदय के लिये २ इकाईयां, घातकी द्वीप के लिये ४ इकाईयां, कालोदधि समुद्र के लिये ८ इकाईयां, पुष्करवरद्वीप के लिये १६ इकाईयां, इत्यादि होंगे।

यह बतलाया जा चुका है कि एक चंद्र के परिवार में एक सूर्य, ८८ ग्रह, २८ नक्षत्र तथा

६६९७५०००००००००००००००० तारे होते हैं। जम्बूद्वीप में २ चंद्रमा, लवण समुद्र में ४ चंद्रमा, घातकी-खंड में १२ चंद्रमा, कालोदक समुद्र में ४२ चंद्रमा, पुष्करवर अर्द्ध द्वीप में मानुषोत्तर पर्वत से इसी ओर ७२ चंद्रमा, तथा मानुषोत्तर से बाहर प्रथम पंक्ति में १४४ चंद्रमा अपने अपने परिवार सहित हैं। मानुषोत्तर से बाहर की प्रथम पंक्ति, द्वीप से ५०००० योजन आगे जाकर है जहां चंद्रों की संख्या १४४ है। उससे आगे एक एक लाख योजन आगे जाकर, उत्तरोत्तर सात पंक्तियां अथवा वलय हैं जहां के चंद्रों का प्रमाण इस आदि प्रमाण १४४ से ४ प्रचय को लेकर वृद्धि रूप है, अर्थात् वहां क्रमशः १४८, १५२, १५६, आदि चंद्रों की संख्या है। इसके आगे के समुद्र की भीतरी पंक्ति में २८८ चंद्र हैं। यहां भी, एक एक लाख योजन चल चलकर वलय स्थित हैं जहां चंद्र बिम्बों का प्रमाण ४, ४ प्रचय लेकर वृद्धि रूप है। पुनः इस समुद्र के आगे जो द्वीप है वहां २८८ × २ प्रमाण चंद्र बिम्ब प्रथम पंक्ति में हैं और १, १ लाख योजन चल चल कर उत्तरोत्तर स्थित ६४ पंक्तियों में ४, ४ प्रचय लेकर चंद्र बिम्बों का प्रमाण वृद्धि रूप अवस्थित है।

इस प्रकार प्रथम तीन द्वीपों (जम्बूद्वीप, घातकीखंड द्वीप और पुष्करवर द्वीप) तथा दो समुद्रों (लवण समुद्र और कालोदधि समुद्र) को छोड़कर, अगले समुद्र तथा द्वीपों में स्थित चंद्रों के प्रमाण को निकालने के लिये न्यास दिया गया है।

तृतीय (पुष्करवर) समुद्र में वलयों या पंक्तियों की संख्या ३२ है, इसलिये यहां गच्छ (number of terms) ३२ है। प्रथम पंक्ति में २८८ चंद्र बिम्ब हैं, इसलिये २८८ गुण्यमान राशि (first term) है। ४ प्रचय (common difference) है।

चतुर्थ (वारुणीवर) द्वीप में वलयों की संख्या ६४ है, इसलिये गच्छ ६४ है। प्रथम पंक्ति में $(२८८ \times २) = ५७६$ चंद्र हैं, इसलिये गुण्यमान राशि ५७६ है। ४ प्रचय है।

इसी प्रकार पांचवें (वारुणीवर) समुद्र में गच्छ १२८, गुण्यमान राशि ११५२ है तथा ४ प्रचय है।

इस प्रकार, इन द्वीपों तथा समुद्रों में चंद्र बिम्बों का प्रमाण, हम समान्तर श्रेढि के संकलन के आधार पर सूत्र का प्रयोग करेंगे।

जहां गच्छ n है, गुण्यमान राशि (प्रथम पद) a है, तथा प्रचय d है, वहां,

$$\text{कुल घन} = \frac{n}{2} \{ 2a + (n-1)d \} \text{ होता है।}$$

इसलिये, तृतीय समुद्र में, समस्त चंद्र बिम्बों का प्रमाण

$$= \frac{32}{2} \{ 2 \times 288 + (32-1) \times 4 \}$$

$$= 32 \times 288 + (32-1) \times 64 \text{ होता है।}$$

चतुर्थ (वारुणीवर) द्वीप में, समस्त चंद्र बिम्बों का प्रमाण

$$= \frac{64}{2} \{ 2^2 \times 288 + (64-1) \times 4 \}$$

$$= 64 \times 2 \times 288 + (64-1) \times 64 \times 2 \text{ होता है।}$$

पंचम (वारुणीवर) समुद्र में, समस्त चंद्र बिम्बों का प्रमाण

$$= \frac{128}{2} \times \{ 2^3 \times 288 + (128-1) \times 4 \}$$

$$= 64 \times 2^3 \times 288 + (128-1) \times 64 \times 2^2 \text{ होता है।}$$

इत्यादि।

यदि कुल द्वीप-समुद्रों की संख्या n ली जावे तो पांच द्वीप छूट जाने के कारण, हमें केवल $n-५$ ऐसे होनेवाले प्रमाणों का योग, कुल चंद्र बिम्बों का प्रमाण निकालने के लिये करना पड़ेगा। इस योग में

इन क_२ बीजों को अब आगे के द्वीप-समुद्रों में एक-एक छोड़ने पर अंतिम बीज (क + क_१ + क_२) वें द्वीप अथवा समुद्र में गिरेगा। इस द्वीप अथवा समुद्र का व्यास २^(क + क_१ + क_२ - १) लाख योजन होगा। इस क्रिया के समाप्त होते ही शलाकाकुंड में पुनः एक बीज डाल देते हैं। इतने व्यासवाले अनवस्थाकुंड में $\left\{ \frac{(२क + २क_१ + २क_२ - २)}{क \times २} \right\}$ बीज समावेंगे। इस प्रमाण को क_३ द्वारा प्ररूपित करेंगे।

इस प्रकार यह विधि तब तक संतत रखी जावेगी जब तक कि शलाकाकुंड न भर जावे, अर्थात् यह विधि क बार की जावेगी। स्पष्ट है कि इस क्रिया के अंत में अंतिम बीज क + क_१ + क_२ + क_३ + + क_{क-१} वें द्वीप अथवा समुद्र में गिरेगा।

इस द्वीप अथवा समुद्र का व्यास २^(क + क_१ + + क_{क-१} - १) लाख योजन होगा। इस व्यासवाले अनवस्थाकुंड में $\left\{ \frac{(२क + २क_१ + + २क_{क-१} - २)}{क \times २} \right\}$ बीज समावेंगे। इसका प्रमाण क_क से निर्दिष्ट करेंगे।

स्मरण रहे, कि यहा शलाकाकुंड भर चुका है और प्रतिशलाकाकुंड में अब १ बीज डाला जावेगा। इतने व्यास के इस अनवस्थाकुंड को लेकर पुनः एक शलाकाकुंड भरा जावेगा और उस क्रिया को क बार कर लेने पर प्रतिशलाकाकुंड में पुनः १ बीज डाला जावेगा। स्पष्ट है कि 'क' 'क' बार यह क्रिया पुनः पुनः कितने बार की जावेगी? 'क' बार की जावेगी, तभी प्रतिशलाकाकुंड भरेगा। इस क्रिया के अंत में अंतिम बीज क + क_१ + क_२ + + क_क + + क_२क + + क_२क^२ - १ वें द्वीप अथवा समुद्र में गिरेगा। इस द्वीप या समुद्र का व्यास निकाला जा सकता है, तथा इस व्यास के अनवस्थाकुंड में समाये गये बीजों की संख्या भी निकाली जा सकती है।

यहा प्रतिशलाकाकुंड पूर्ण भर चुका है और १ बीज महाशलाकाकुंड में इस क्रिया की एक बार समाप्ति दर्शाने हेतु डाल दिया जाता है। उक्त प्रतिशलाकाकुंड को भरने के लिये जो क्रिया क^२ बार की गई है उसे पुनः पुनः अर्थात् क बार करने पर ही महाशलाकाकुंड भरा जावेगा। स्पष्ट है कि महाशलाकाकुंड भरने पर इस महा क्रिया में अंतिम बीज

क + क_१ + क_२ + + क_क + + क_२क + + क_२क^२ + + क_२क^३ - १ वें द्वीप या समुद्र में गिरेगा। इस द्वीप या समुद्र का व्यास २^(क + क_१ + + क_क^३ - १) लाख योजन होगा।

इतने व्यासवाले अनवस्थाकुंड में $\left\{ \frac{(२क + २क_१ + + २क_क^३ - १ - २)}{क \times २} \right\}$

बीज समावेंगे जिसे हम क_क^३ द्वारा प्ररूपित कर सकते हैं। यही प्रमाण Δp_j है जो S_u से मात्र एक अधिक है। यहां यतिवृषभ का संकेत है कि यह श्रौद्ध पूर्व के ज्ञाता श्रुतकेवली का विषय है। अंतिम श्रुतकेवली भद्रबाहु थे जिनके समीप से मुकुटधारियों में अंतिम 'चंद्रगुप्त' दीक्षा लेकर सम्भवतः दक्षिण की ओर चले पड़े थे।

परिशिष्ट (२)

तिलोयपण्णसी, ४, ३१० (पृ. १८०-८२) के प्रकरण को और भी स्पष्ट करना यहां आवश्यक है। यतिवृषभ ने यहां संकेत किया है कि जहां जहां असंख्यात का अधिकार हो वहां वहां Δp_j ग्रहण करना चाहिए। यहा संदेह होता है कि क्या लोकाकाश के असंख्यात प्रदेशों का भी यही प्रमाण माना जाय ?

इसके उत्तर में यही कहा जा सकता है कि जहां पत्योपम, अवलि आदि की गणना का सम्बन्ध है वहां Ay_j का ग्रहण करना चाहिए तथा इस सम्बन्ध में तो लोकाकाश के प्रदेशों की संख्या गणना की अपेक्षा से वास्तव में संख्या के अतीत होने से जो भी उसका प्रमाण है उसे उपधारणा (postulation) के आधार पर मात्र असंख्यात से अलंकृत कर देना ही उचित समझा गया है, जहां Ay_j का ग्रहण करना वांछनीय नहीं है। यह तथ्य तब और भी स्पष्ट हो जाता है, जब कि हम देखते हैं कि

$$\{ \log \}$$

$$अं = प$$

इस समीकार का निर्वचन हम पहिले ही दे चुके हैं। अं सूत्र्यगुल में स्थित प्रदेशों की गणात्मक संख्या का प्रतीक है और प पत्योपमकाल राशि में स्थित समयों (The now of zeno) की गणात्मक संख्या का प्रतीक है। पत्योपमकाल में स्थित समयों की संख्या का प्रमाण* देखते हुए हमें जब सूत्र्यगुल में स्थित प्रदेशों की संख्या का आभास मिलता है तो यह निश्चय हो जाता है कि लोकाकाश के प्रदेशों की संख्या, गणना की अपेक्षा अतीत है। केवल काल की गणना में असंख्यात शब्द के लिये Ay_j का ग्रहण हुआ प्रतीत होता है। इस प्रकार आवलि में असंख्यात समय का अर्थ Ay_j समय हुआ। जहां उद्धार पत्य को असंख्यात कोटि वर्षों की समयसंख्या से गुणित करने का प्रकरण है वहां भी इस असंख्यात को Ay_j के रूप में ग्रहण करने पर हमारा यह विभ्रम दूर हो जाता है कि अं न माह्म क्या है। दूसरी जगह आये हुए असंख्यात शब्द Ay_j के लिये प्रयुक्त नहीं हुए हैं इसी कारण यहां अधिकार शब्द का प्रयोग हुआ है।

संस्थाधारा में Ap_j का प्रमाण सुनिश्चित है इसलिये Ap_j का Ap_j में Ap_j बार गुणन होने पर जो Ay_j की प्राप्ति हुई है, वह भी सुनिश्चित अचल संख्या प्रमाण है।

जिस पत्योपम के आधार पर सूत्र्यगुल प्रदेश राशि की संख्या का प्रमाण बतलाया गया है उस समयराशि (अद्वापत्य काल राशि) में स्थित समयों की संख्या का प्रमाण

$$= \{Ap_j \text{ (कोटि वर्ष समय राशि)}\}^2 \times (\text{दसहार् पद्धति में लिखित ४७ अंक प्रमाण समय राशि})$$

$$= (Ap_j)^2 (\text{दसहार् पद्धति में लिखित ६१ अंक प्रमाण}) \{1 \text{ वर्ष समय राशि प्रमाण}\}^3$$

$$= (Ap_j)^2 (\text{दसहार् पद्धति में लिखित ६१ अंक प्रमाण संख्या}) \{(2)^4 (15)^2 (323)^2 (7)^2 \cdot Sm\}^3$$

यहां Sm एक चल (variable) क्रमबद्ध, प्राकृत संख्या युक्त राशि है जिसके अवयव Su तथा Sj की मध्यवर्ती प्राकृत संख्याओं के पद ग्रहण करते हैं। यहां Sm का निश्चित प्रमाण ज्ञात नहीं है पर विज्ञान के इस युग में उसकी नितान्त आवश्यकता है। सम्भवतः Sj और Su के बीच का यह प्रमाण निश्चित करने में मूलभूत कर्णों के गमन विज्ञान में दक्ष भौतिकशास्त्री कुछ लाभ ले सकें। Sm को इसी रूप में रख उन आचार्यों ने क्या सहज भाव को अपनाया है अथवा आंकिकी पर आधारित सम्भावना (probability) को व्यक्त किया है? हम अभी नहीं कह सकते।

*षट्खंडागम, पु. ३, प्रस्तावना पृ० ३४, ३५.

शब्द-सूची

शब्द	पृष्ठ	शब्द	पृष्ठ	शब्द	पृष्ठ
अकलंक देव	२, ७	अनुश्रेणि Along a world line	३	आत्मा Soul	५
अक्षांश Latitude	१२	अन्तराल Interval	४५	आधार Base	८४
अक्षीयपरिभ्रमण		अन्यथायुक्तिखंडन		आन्ध्र शिलालेख	
Axial revolution	८७	Reductio-ad-absurdum	३	Andhra inscription	१०
अङ्कगणना Numeration	८	अन्योन्यगुणकारणता Mutual		आनुपूर्वी	६४
अङ्कमुख	६७	multiple-log	७६ आदि	आयतचतुरस्राकार	
अङ्गुल		अपोलोनीयस	९६	Rectangular	५
Finger (width)	१९, २३	अमेघ Indivisible	३	आयाम Length	३, ६९
अखंड Continuous	३	अमूर्त Abstract	३	आयु Age	४८
अचल मात्रा		अयन Solstice	९७	आर्कमिडीज	८, १३, १५
Invariant mass	६	अर्द्धगोलक		आर्यभट्ट	८, ९
अचल्यता		Hemisphere	८७, ८८	आवलि A measure of time	
A measure of time	५५	अर्द्धच्छेद log to the base two			३, १२, ५४, ८०
अणुविभञ्जन			१, १०, १५, ७६	आवृत्ति	
Atomic splitation	५	अर्द्धपुद्गलपरिवर्तन		Period (frequency)	९८
अतिरक्त (Extra)	७७	A measure of time	६२	इच्छा Quantity wished	४४
अतिगोल Right circular		अलोकाकाश Empty space	७	इष्वाकार Arc	६७
cylinder	४९	अलौकिकी Non-Worldly		ईशस	७
अद्वा पत्य		(akin to arithmetica)	२	ईसा Christ	१
A measure of time	३	अस्वरसङ्गत्व Comparability		उत्कृष्ट असंख्यातासंख्यात	
अधर्म इत्य Rest-causality			१, २, ९, ११, १२, ८३	A kind of innumerable	६०
(An entity)	७	अवगाहना		उत्कृष्ट संख्यात	८
अवस्तन द्वीप		Space occupied	१२, ८४	उत्तर Latter	४२
Inner island	७४	अवधा Segment	१४, ५४	उदयरथान Rising place	९६
अनन्त Infinite	१-३, ५, ५५-६, ६०, ६२	अवधारणाये Concepts	४	उपधारणा Postulate	४
अनन्त विभाज्यता Divisibility		अवधिज्ञान	१, १२, ५५	उपधारित Postulated	२, ५
ad-infinitum	३, ७	अविभागप्रतिच्छेद		उपमा-मानं Simile-measure	३
अनन्तानन्त		Ultimate part	१५	उपराशि Subset	३
A kind of Infinite	१८	अवशिष्ट Remaining	४०	उपरिम द्वीप Outer island	७४
अनीक Army	४७, ४८	असंख्यात Innumerable	१-३, ७, ५६-७, ६१, ७६	ऋद्धि	६५
अनुपात सिद्धान्त		आकाश Space	३, ५, ६	एक एक संवाद One-one	
Theory of proportion	१४	आतपक्षेत्र	१७, ९२	correspondence	२
				एकानन्त	
				Uni-directional infinite	४

शब्द	पृष्ठ	शब्द	पृष्ठ	शब्द	पृष्ठ
एरिस्टरशस	१६	गणनानन्त		छेदविधि	
एरिस्टाटिल	३	Numerical infinite	५६	Mediation method	१, १२
औपचारिक Formal	२	गणात्मक Cardinal	२, ३	छेदा गणित Logarithm	२२, ७०
कक्षा Class	४७	गति Motion	७	जगप्रतर (World surface)	
कर्णविधि Diagonal method	६२	गली Path	९१	A measure of area	२३
कायमार्गणा		गिरिकटक क्षेत्र	३५	जगश्रेणी (World-line) a	
Soul's bodily search	७५	गुणोत्तर श्रेढि Geometrical		measure of length	३, ७,
काल Time	५४	Progression	९, ४८, ६९	८, १०, १८, २२, ४६, ४८	
काल द्रव्य Time-causality	७	गेलिलियो	१	जघन्य अनन्तानन्त	६१
कुण्ड Pit	५६	गंगा	५२	जघन्य परितानन्त	५७, ६०
कुन्तल (Spiral)	१५, ८९	ग्रह Planets	१६, ९६	जघन्य परितासंख्यात	५७
कुशानकाल	१०	ग्रीस	११	जम्बूद्वीप	५
कूलिज	४०	घटना Event	७	जलकायिक जीवराशि Set of	
केन्टर (जार्ज)	१-३	घनफल Volume	१२, १४	water-bodied souls	८०
केवली Omniscient	१, ३, ५५	घनमूल Cube Root	८	जीनो Zeno	१, ७
क्रमबद्ध Ordered	२	घनलोक Volume of Universe		जीव Soul (Living-being)	६, ७
क्रियात्मक (प्रतीकत्व) Operational		२५-२९, ७५		जीवा Chord	१३, ५०, ५२
symbolism	१०	घनवातवलय		जैनाचार्य	९, १०, १२-३, १६
क्षत्रप शिलालेख		Atmosphere	३६ आदि	ज्यामिति Geometry	१
Kshatrap inscriptions	१०	घनाकार Cube	३०	ज्यामिति अवधारणाएं	
क्षुरप्र	६७	चक्षुस्पर्श ध्वान (क्षेत्र)		Geometrical concepts	२
क्षेत्र प्रयोग विधि Method of		Range of vision	१७, ९५	ज्यामिति विधिया	
application of		चतुर्भुज समलम्ब		Geometrical methods	१२
areas	१५, ३६	Trapezium	२५, २६	ज्योतिष Astronomy	१, १५
क्षेत्रफल Area	१२	चन्द्रबिम्ब (सपरिवार)		टेलर	१४
(अल्पबहुतृण)	७२	Moon's family	९, १५, ९९	टिस्कार्थीज	७
(त्रिभुज)	२७	चय Common difference	४२	डेन्टन	५
(द्वीप)	६९, ७०, ७१	चान्द्र दिवस Lunar day	१६	तत्त्वार्थवार्तिक	२, ७
(धनुष)	६६	चार क्षेत्र Motion-space	९६	तर्क Logic	३
(वृत्त)	४९	चिचचांग सुआन चु	१४	तिमिरक्षेत्र	१७, ९२
क्षेत्रावगाही	५	चीन	१, १३, १४	तिर्थक्-आयत-चतुरस्र Cuboid	३०
ख	४९, ५०	चूल्का Top	५१	तेजस्कायिक जीवराशि Set of	
खंडशलाका Piece-log	७३	चैत्य	४७	fire bodie d souls	७५
गगनखंड Sky-division	९६	छेद Section	३	तसकायिक जीवराशि	८०
गच्छ Number of terms	४२				

शब्द	पृष्ठ	शब्द	पृष्ठ	शब्द	पृष्ठ
त्रसनाली	४९	पल्योपम A measure of time		बख्शाली काल	११
त्रिकालवर्ती	१		३, २१, ७६	बख्शाली हस्तलिपि	८, १०
त्रिलोकसंरचना	१५	पाताल	६६-७	बर्जी	९
त्सुगुंग चिह्न	१३	पायथेगोरस	१५, ५०, ५२	बहुमध्यभाग Exact centre	७
दक्षिणपक्ष Right hand side	७९	पायथेगोरियन वर्ग	४, ५	बाण Height of a segment	
दशमलव Decimal	२	पायथेगोरियन सिद्धान्त			५२-३
दिव्यध्वनि Divine sound	६५		४, ७, ८, ९, १६	बालग्र Tip of hair	२०, २१
दूप्य क्षेत्र Comcal	३५	पारपरिमित गणनात्मक		बाह्य Width	८१
दृष्टिवाद अंग	१३	Trans finite cardinal	५६	बिन्दु Point	३, ४, ७
द्रव्य Substance	२, ७	पार्श्वभुजा	५१, ६४	चिम्ब Disc	१५
धनुष Arc	१४, ५२-४	पाचसाठ	८	चिह्न Hole (Dwellings of	
धर्मद्रव्य Motion causality		पुद्गल Matter and electricity		the bells)	४१, ४५
[entity]	३, ७		३, ४, ५, ६, ७, १८	बीजगणित Algebra	९, १०
नाना घाट शिलालेख	१०	पुल्य (पूर्व)	४७	बीथी Orbit	९० आदि
निकोमेशस	९	पुण्यदन्त	१, ६८	बृहस्पती Jupiter	१५
नियमित साठ Regular solid	७	पूर्वकोटि	४७	बेवीलोन	१, ८, १२-४, ४०
निष्पत्ति Ratio	२०, ४९	पृथ्वीकायिक जीवराशि Set of		बेलन Cylinder	२०
नेपियर (जान)	९	earth bodied souls	८०	बोलजेनो	३
नेसिलेमेन	२३	पृथ्वीमाप	४०	बौद्धायन	१३
पटल Disc	४१	पेपीरस (आहम्स)	२०	ब्राह्मी लिपि	११
पथमूचीचय	९६	प्रकीर्णक तारे	८६	भरतक्षेत्र	५१
पद Term	४२	प्रचय Common difference	४२	भव्यजीवराशि	६२
परमाणु Ultimate particle of		प्रतरांगुल		भारत	१५
mass (matter or energy)	४९	A measure of area	३, ८६	भारतीय	१६
परम्परा Tradition	१	प्रतिराशि	५८	भाषा	६५
परम्परागत Traditional	४	प्रतीक Symbol	१, ३, १०-२, २३-४, ४६	भास्कराचार्य	२०
परस	४	प्रदेश Space-point		भूतबलि	१, ६८
परिकर्म	५, १५		३, ५, ६, ७, १८	भेद	३
परिगणित		प्रभव	४२	मङ्गल Mars	१५
Meta-mathematics	३	प्रमाण Measure	२, ३	मथीमतिकी Mathematica	२
परिधि Circumference	१३, ४९	प्राकृत सख्या		मन्दर	६८
परिमित Finite	३	Natural number	२, ९, ५५	मन्दराकार क्षेत्र	३२-३४
परीत (Trans)	५६	प्रेयो	२, ४, १६	महत्ता Magnitude	३
पल्य A measure of time		फर्मेट	७	महावीराचार्य	१, १०, १४, ६६
	१२, २०, २२	फिलोलस			

शब्द	पृष्ठ	शब्द	पृष्ठ	शब्द	पृष्ठ
मेसर	१७	वर्गमूल Square root	८	श्रुतकेवली Imbiber of	
मापिकी Measuration	१२	वर्गशलाका log of log to the		scriptural knowledge	५५
मिथ्याभास Paradox	३	base two	६, ७, ९, १०	श्रेणि Series	४, ६
मिश्र Egypt	१, ८, ११-२	वलय Ring	६८, ७०	श्रेणिप्ररूपणा	१
मुख First term	४२	वातवलय Atmosphere	३६ आदि	षट्खंडागम	१, ८
मूल Root	११, ४६	वायुकायिक जीवराशि Set of		षष्टिक चावल	७
मेरु	६३	air bodied souls	८०	षाष्टिक पद्धति	
मोड़ा Turn	७	वास्तविक सत्य	५	Sexagesimal measure	८
यतिवृषभ	१, ५, ९, १०-१२, १४-५	विग्रहगति Motion of a soul		समच्छिन्नक Frustrum	३७-८
यवमध्य क्षेत्र	३२	for a new birth	६, ७	समद्विबाहु Equilateral	८५
यवमुरंज क्षेत्र	३१	विजयाद्ध	५२	समय Ultimate part of time	
याम Coordinates	७	विदारण विधि	१५	(The now of Zeno)	
युक्त	५६	विद्युन्मय कण Electron	६		३, ७, २२, ५४
यूक्लिड	४	विन्दफल Volume	४९	समवसरण (स्वूप)	६४-५
यूनान १, २, ५, ८, १०, १३-४, १६		विमा Dimension	४	समवृत्त स्तूप	
यूनानी ज्यामिति ४, ९, ११-२, १५		विवक्षित Arbitrary	४७	Circular pyramid	६४
यूनानी ज्योतिष १६		विश्वरचना World structure	१	समान गोल Sphere	६८
योजन A measure of		विष्कम्भ Width	५, ६५, ६९	समानुपात सिद्धान्त	
distance	२०, ८७	विस्तार Width, or		Theory of proportion	२५
रञ्जु A kind of length		diameter	४५, ५३	समान्तर श्रेढि	
measure	३, १२, १५, १८, २४	विंडमेन	२४	Arithmetical progression	
रंग	४	वीरसेन १, ४, ५, ८-१५, २२, २४			९, ४१, ४४, ४७
राशि Set	१-३, ६२		५९, ६२	समान्तरांकीक	
राशि सिद्धान्त	५५	वृत्त Circle	१२	Parallelepiped	३७
रिण Minus	१०, ११-२	वृद्धि Increase	७१-२	समान्तरी गुणोत्तर श्रेढि	
रेखा (सरल) Straight line	३	वेत्रासन १, १४, २५, ४०, ४१		Arithmatico-geometric	
रोमन खेत गणक	९	शक्ति	३	progression	७३
रम्भ संक्षेत्र Right prism	२४	शलाकानिष्ठापन		सकलित घन Sum of series	
लोकाकाश Universe	७, १८	Log-filling	८, १०		४२ ४३, ४८
लौकिकी Worldly		शंकु समच्छिन्नक		संख्यात Numerable	२, ५४, ५६
(akin to logistica)	२	Frustrum of a cone	१४	संख्या प्ररूपणा	
वन्दन First term	४२	णक्वाकार (मृदंग) Conical	१४	Number of exposition	१
वर्गण-सम्बर्गण	५, ९, ५९, ६०	शंख सूत्र		संख्या मान Measure	३
		शुल्ब सूत्र	१३	संख्या सिद्धान्त	
		शून्य Zero	६, ८, ११	Theory of number	१, २

शब्द	पृष्ठ	शब्द	पृष्ठ	शब्द	पृष्ठ
संज्ञा denomination	२	सिंधु	५२	स्थानांहा पद्धति Place value	
संततता Continuum	२	सुकरात Socrates	४	notation system ८, २१, ४९	
संदिष्ट Symbol	५४	सूची Width	६९	स्पर्श Touch	१
सागरोपम	३	सूर्यगुल A measure of		स्वप्रकाशिन Self illuminant ८७	
सातिरिक्ता Excess	७४	length ३, १२, २२, ४९		स्वसिद्ध Axiom	१
संश्लेष मात्रा Relative mass	६	सूर्य Sun	१५	हाइजीन्स	१६
सामान्य लोक	३०			हिप्यडाम	१५
सिक्न्दरिया	१४, ५५	स्कन्ध Molecule	३, १८-९	हीथ	७
				हेरन	१६, ४०

गणित लेख का शुद्धि-पत्र

पृष्ठ	पंक्ति	भूल	सुधार	पृष्ठ	पंक्ति	भूल	सुधार
२	नीचे से १२	"	३	१८	नीचे से १	अनन्त्या-पत्र	अनन्त्या-पत्र
	नीचे से १०	"	"			परमाणु	परमाणु
	नीचे से ८	"	"	२१	नीचे से ३	Egyptians	Egyptians
३	ऊपर से १५ (इंग्र)= $\log_2(५)$	(इंग्र)= $\log_2(५)$		४०	नीचे से १	etc.	etc.
६	ऊपर से ४	interval	interval	६२	नीचे से १७	No	No
७	ऊपर से १८	mathematical	mathematical	नीचे से १२ २	No > No	>	>
९	ऊपर से ८	पुनः	—	८८	ऊपर से ७	minuts	minutes
११	नीचे से ९	की	के		ऊपर से ८	"	"
	नीचे से ८	थ	थी	९७	नीचे से ९	motien	motion
	नीचे से ५	n-	-n-	१०३	नीचे से ११	कक२	कक२
१५	ऊपर से ३	व्या२-व्या१	व्या२-व्या१	१०४	ऊपर से ६	इंग्र={log}	इंग्र={log}
		२०	२०		ऊपर से ८	zeno	Zeno
१८	नीचे से ६	है२	है		नीचे से ६	गक्ति	गति